

# NUEVA FORMULACIÓN DEL PRINCIPIO DE HUYGENS PARA ONDAS PLANAS

Julio A. Romero\*, Centro de Estudios para la Educación Superior (CEPES), Universidad de La Habana, Cuba  
Luis Hernández\*\*, Facultad de Física, Universidad de La Habana, Cuba

## RESUMEN

En el presente artículo se presenta una nueva formulación matemática del Principio de Huygens para ondas planas, el cual es descrito a través de una ecuación vectorial integral. Se demuestra que las soluciones de los problemas que pueden plantearse con la nueva formulación satisfacen la ecuación homogénea de Helmholtz. Una expresión para la densidad de energía de las ondas emitidas por las fuentes secundarias es obtenida. Para ilustrar la nueva formulación se realiza el cálculo exacto de la intensidad de la luz difractada por una abertura circular a lo largo del eje perpendicular a su centro, encontrándose una ecuación analítica exacta que describe la intensidad de la onda difractada. A continuación se hace un análisis comparativo entre los resultados aquí obtenidos y los correspondientes a la teoría de Fresnel. Se realiza un análisis similar para una placa zonal.

**Palabras clave:** Principio de Huygens, ondas planas, Teoría de Fresnel.

## ABSTRACT

The article presents results corresponding to a new mathematical formulation of Huygens' Principle for plane waves which is described by a vectorial integral equation. We showed that the solutions of the integral equation fulfill the Helmholtz's equation. Subsequently the density of energy of the secondary waves was determined. The task is illustrated by the diffraction due to a circular aperture. We found an exact analytical equation that describes relative intensity of the diffracted light as a function of the distance from the center of the circular aperture. For the first maxima and minima, the intensity behavior is similar to the one predicted by Fresnel's theory. However, for distances near to the aperture, the difference is remarkable. An extension of the theory is made to study the diffraction through the zonal plates. It must also be pointed out that contrary to previous methods; the present formulation is dealt with a vectorial analysis without recurring to any approximations.

**Key words:** Huygens' Principle, plane waves, Fresnel theory.

## INTRODUCCIÓN

Christiaan Huygens dio a conocer el principio que lleva su nombre en 1678, y puede decirse, que este principio le debe mucho a la confianza que depositó su autor en la teoría ondulatoria de la luz. Pero no sería hasta el año 1818, que Augustin Jean Fresnel planteara una fórmula matemática para hacer un uso cuantitativo de este principio.

La aproximación escalar, para explicar la luz difractada a través de las integrales de Fresnel-Kirchhoff, es relativamente simple y una herramienta muy útil para describir la propagación de la luz coherente. Con esta aproximación es posible resolver un buen número de problemas actuales de la óptica con un significado físico real. Sin embargo, la aproximación de Fresnel está restringida a la difracción bajo pequeños ángulos donde es excluida la naturaleza vectorial del campo eléctrico, la cual hay que tener en cuenta cuando la difracción ocurre bajo grandes ángulos.

La difracción que tiene lugar a través de una abertura circular iluminada por una onda convergente ha recibido especial atención durante años [1]. Por supuesto, un problema particular puede ser resuelto mediante métodos numéricos pero las teorías simplificadas impiden entender las tendencias y predecir comportamientos. Partiendo de la teoría simple de Debye [2] varias mejoras han sido introducidas al estudio de la difracción que incluye la extensión a sistemas ópticos de gran apertura [3], considerar los efectos de la polarización [4] y sistemas ópticos con un número finito de zonas de Fresnel [5]. Por otra parte, recientemente se han publicado varios trabajos que estudian la aproximación de Fresnel para el cálculo de la intensidad difractada fuera del eje de simetría [6.7]. Sin embargo, en todos estos trabajos se utiliza la aproximación escalar.

En un trabajo preliminar anterior [8] presentamos una nueva formulación matemática del Principio de Huygens para ondas planas, el cual es descrito

---

E-mail: \*julioarr@cepes.uh.cu  
\*\*luisman@ff.oc.uh.cu;

mediante una ecuación vectorial integral. Hemos demostrado que las soluciones de los problemas que pueden plantearse con la nueva formulación satisfacen la ecuación homogénea de Helmholtz y las condiciones de Sommerfeld. En el presente trabajo se reporta una expresión para la densidad de energía de las ondas emitidas por las fuentes secundarias. Para ilustrar la nueva formulación se realiza el cálculo exacto de la intensidad de la luz difractada por una abertura circular a lo largo del eje perpendicular a su centro, encontrándose una ecuación analítica exacta que describe la intensidad de la onda difractada. Para los primeros máximos y mínimos de intensidad de la luz difractada, su comportamiento es idéntico al predicho por la teoría de Fresnel, sin embargo para distancias cercanas a la abertura su diferencia es sustancial. La teoría también es utilizada para el estudio de las placas zonales encontrándose que la posición de los máximos no se altera, pero si el ancho medio de los picos. Igualmente se observa el efecto de la difracción disminuyendo la intensidad de los máximos al acercarnos al plano de la placa zonal.

## 2. ECUACIÓN INTEGRAL

Aplicando la segunda fórmula de Green a un dominio en forma de pirámide recta de base circular de altura  $R$  y pasando al límite cuando el radio de la base del cono tiende a infinito, se obtiene una función escalar acotada, continuamente derivable y que es además solución de la ecuación homogénea de Helmholtz. Esta función toma la forma de:

$$F(A, E) = -\frac{ERe^{\pm ikR}}{2\pi} \int_A \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{e^{\mp ikr'}}{r'} \right) \frac{ds'}{r'} \quad (2)$$

$$f(\text{plano}, E) = E \quad (3)$$

En la relación,  $f(A, E)$  es el valor de la función escalar en el punto  $p$  que se encuentra situado a una distancia  $R > 0$  del plano de integración,  $A$  es el área de integración sobre el plano y  $r'$  es la distancia entre el punto  $p$  y cualquier punto  $p'$  del área de integración. Integrando sobre todo el plano se obtiene la relación 3.

## 3. PRINCIPIO DE HUYGENS

Se considera un régimen estacionario de ondas electromagnéticas planas monocromáticas y un medio homogéneo, isótropo y lineal; además el frente de onda plano con fase  $\alpha$  en el instante inicial se encuentra a la distancia  $R$  de un punto  $p$  y a partir de dicho instante se mueve acercándose al punto en cuestión. Colocando el origen de coordenadas del sistema de referencias en dicho punto, entonces, el vector del campo eléctrico de la onda plana monocromática, viene dado por:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + k(z-R) + \alpha)} \quad (4)$$

El vector del campo eléctrico en el punto  $p$ , se obtiene evaluando en  $z = 0$ . Teniendo en cuenta el carácter transversal de las ondas electromagnéticas, asumiendo que  $E_p(t)$  representa cualquiera de las componentes transversales y que  $E_0$  es su amplitud correspondiente, se tiene:

$$E_p(t) = E_0 e^{i(\omega t - kR + \alpha)} \quad (5)$$

Sustituyendo  $E$  en la ecuación 2 por la relación 5, el valor de cada componente transversal del vector del campo eléctrico se obtiene integrando 2 por todo el plano  $z = R$ . Para determinar la componente  $z$  del vector del campo eléctrico de las ondas secundarias, se asume que éstas son también transversales. Considerando lo expresado anteriormente y el hecho de que el origen de coordenadas del sistema de referencia no tiene que coincidir con el punto donde se está evaluando el vector del campo eléctrico, se llega a una ecuación vectorial relevante, que es la base de la nueva formulación del Principio de Huygens para las ondas planas:

$$d\vec{E}(\vec{r}', \vec{r}, t) = (d\vec{s}' \times \vec{E}_p(t)) \times \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \frac{\partial}{\partial |\vec{r}' - \vec{r}|} \left( \frac{e^{\mp ik|\vec{r}' - \vec{r}|}}{2\pi|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \quad (6)$$

donde

$$\vec{E}_p(t) = \vec{E}_0 e^{\pm i(\omega t + \alpha)} \quad (7)$$

El vector del campo eléctrico dado por la ecuación 7 corresponde al campo de una onda plana en el punto de observación, y en general, tomará una u otra forma en función de las condiciones de contorno del problema de difracción específico que se considere. Es fácil comprobar que la integral de la ecuación 6 para cualquier área  $A$  del plano de difracción satisface la ecuación homogénea de Helmholtz.

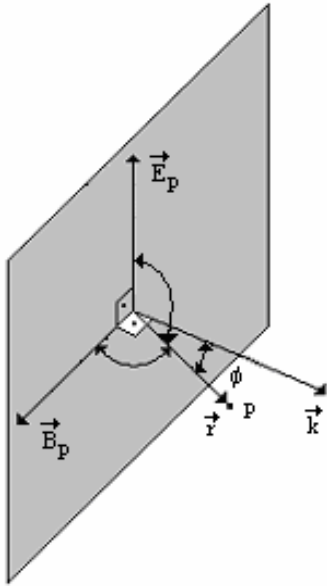
## 4. ONDAS SECUNDARIAS

A partir de la ecuación 6 y considerando esféricos los frentes de ondas secundarios, la densidad de energía de las ondas esféricas secundarias viene dada por:

$$W = \frac{\varepsilon |\vec{E}_0(t)|^2}{8\pi^2 \Gamma^2} \left( k^2 + \frac{1}{r^2} \right) (1 + \cos^2(\phi)) \quad (8)$$

En esta última ecuación  $\Gamma$  es el número de fuentes secundarias por unidad de área,  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica del medio y  $\phi$  es el ángulo que forma la dirección de propagación de la onda esférica secundaria con la dirección de propagación de la onda plana, como puede apreciarse en la Figura 1.

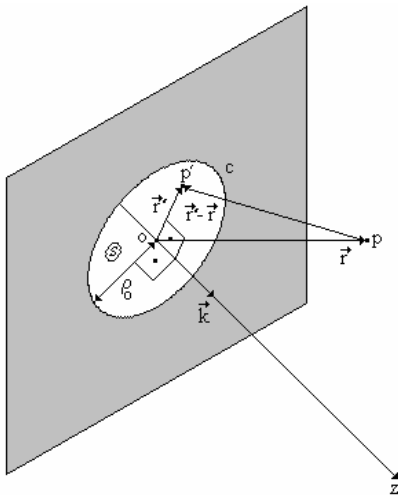
En la ecuación puede observarse que existe simetría axial respecto a la dirección de propagación de la onda plana, además, la densidad de energía de las ondas secundarias disminuye con  $\phi$  y con  $1/r^2$ .



**Figura 1.** Esquema referido a la ecuación 8, para describir la propagación de las ondas secundarias. El ángulo que forman los vectores  $\vec{k}$  y  $\vec{r}$  es  $\phi$ .

## 5. DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CIRCULAR

Supongamos que tenemos una onda plana monocromática incidiendo de forma normal sobre un plano opaco dotado de una abertura circular de radio  $\rho_0$ . Coloquemos el origen de coordenadas O sobre el centro de la abertura y tomemos el eje z en la dirección y sentido de propagación de la onda, como muestra la Figura 2.



**Figura 2.** Pantalla opaca con una abertura circular de radio  $\rho_0$ .

El vector del campo eléctrico de la onda difractada se determina integrando la ecuación 6 por el área de la abertura circular:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{-1}{2\pi} \left[ \hat{e}_z (\bar{\rho}_0 \vec{E}_p(t)) l_1 + z \vec{E}_p(t) l_2 \right] \quad (9)$$

donde  $\vec{E}_p(t) \perp \hat{e}_z$   $\bar{\rho}_0 = \rho_0 \frac{\vec{r}'}{r'}$   $\vec{k} = k \hat{e}_z$   $r^2 = \rho^2 + z^2$

$$l_1 = 2 \int_0^\pi \frac{e^{\mp i k \sqrt{\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 \rho \cos(\psi)}}}{\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 \rho \cos(\psi)}} \cos(\psi) d\psi \quad (10)$$

$$l_2 = 2 \int_0^\pi \int_r^{\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 \rho \cos(\psi)}} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{\mp i k R}}{R} \right) \left( 1 + \frac{\rho \cos(\psi)}{\sqrt{R^2 - r^2 + \rho^2 \cos^2(\psi)}} \right) dR d\psi \quad (11)$$

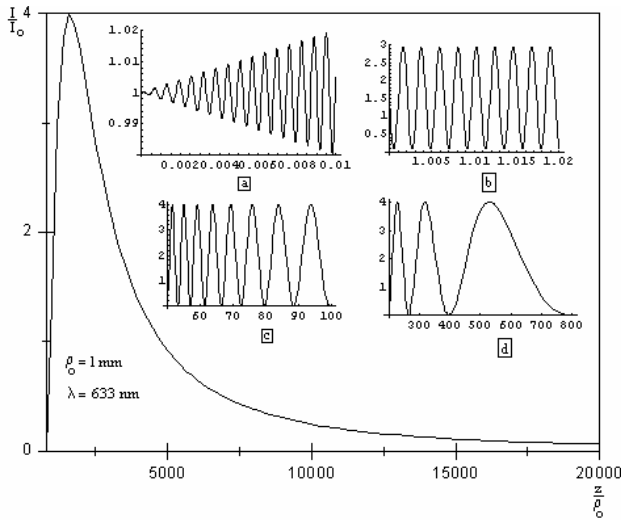
Las ecuaciones 9-11 permiten expresar un resultado analítico para la intensidad relativa  $I/I_0$  de la onda difractada a lo largo del eje de simetría axial de la abertura:

$$\frac{I}{I_0} = 1 + \frac{z^2}{z^2 + \rho_0^2} - \frac{2z}{\sqrt{z^2 + \rho_0^2}} \cos \left( k \left( \sqrt{z^2 + \rho_0^2} - z \right) \right) \quad (12)$$

En la Figura 3 puede verse representado los gráficos de intensidad relativa dados por la ecuación 12 en función de la distancia para una longitud de onda  $\lambda = 633 \text{ nm}$  y  $\rho_0 = 1 \text{ mm}$ , valores que se toman como ejemplo para ilustrar los resultados. Obsérvese que para valores de  $z \gg \rho_0$  la ecuación 12 se reduce a la expresión clásica de acuerdo a la teoría de Fresnel:

$$I = 2I_0 \left( 1 - \cos \left[ \frac{k\rho_0^2}{2z} \right] \right) \quad (13)$$

De tal manera que la posición de los máximos y los mínimos a lo largo del eje coincide con los predichos por la teoría de Fresnel para los primeros órdenes. Para distancias cercanas o menores al valor de  $z = \rho_0$ , la diferencia entre los resultados que se obtienen a partir de la ecuación 12 y la teoría de Fresnel (ecuación 13) se hacen evidentes, como se muestra en la Gráfica 3. Este hecho puede también observarse en la forma analítica de las envolventes de la ecuación 12:



**Figura 3.** Intensidad relativa de la luz difractada en función de la distancia al centro de la abertura. La figura principal muestra el máximo de primer orden en tanto las gráficas insertadas revelan el comportamiento para otros valores de  $z/\rho_0$ .

$$\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho_0^2}}\right)^2 \leq \frac{I}{I_0} \leq \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho_0^2}}\right)^2 \quad (14)$$

Estas últimas se obtienen directamente de la ecuación 12 bajo las condiciones:

$$k\left(\sqrt{z^2 + \rho_0^2} - z\right) = 2n\pi$$

$$k\left(\sqrt{z^2 + \rho_0^2} - z\right) = (2n+1)\pi$$

$$n \leq \frac{\rho_0}{\lambda} \quad (15)$$

Para  $\rho_0 \ll z$ , estas se convierten en las condiciones de mínimo y máximo respectivamente, de la teoría de Fresnel:

$$z \approx \frac{\rho_0^2}{2n\lambda} \quad z \approx \frac{\rho_0^2}{\lambda(2n+1)} \quad (16)$$

## 6. DIFRACCIÓN POR UNA PLACA ZONAL

Considerando una placa zonal, un juego de  $n+1$  anillos concéntricos que se alternan entre opacos y transparentes (ver Figura 4) e integrando la ecuación 6 por el área de los anillos transparentes se obtiene, a lo largo del eje de simetría axial, una expresión para el vector campo eléctrico de la onda difractada por la placa zonal, a saber:

$$\vec{E}(z,t) = z\vec{E}_p(t) \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{(-1)^l e^{\mp i k \sqrt{\rho_l^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho_l^2 + z^2}} \quad (17)$$

donde  $\rho_l$  son los radios de los anillos. La intensidad relativa para un número de anillos  $n+1$  viene ahora dada por:

$$\frac{I}{I_0} = \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{(-1)^{l+j} z^2 \text{Cos}(k(w_l - w_j))}{w_l - w_j} \quad (18)$$

donde 
$$w_l = \sqrt{\rho_l^2 + z^2} \quad (19)$$

La relación que guardan los radios de los anillos  $\rho_l$  con la posición del máximo principal  $z_0$  se obtiene de la ecuación 18:

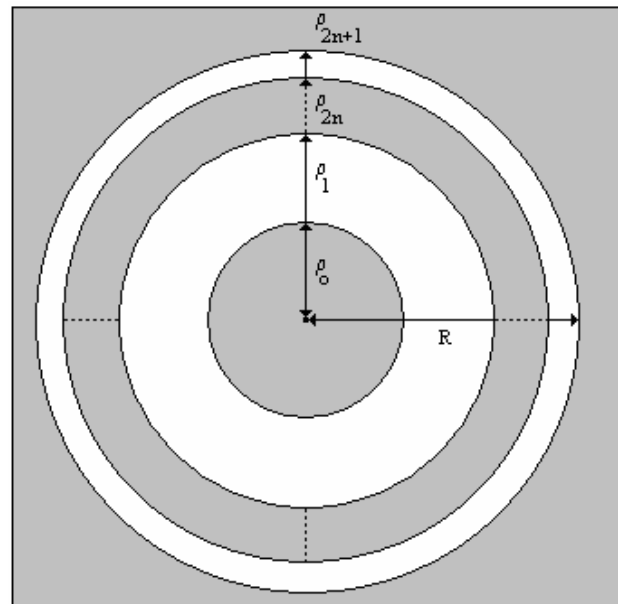
$$\rho_l^2 = \left(\frac{1\lambda}{2}\right)^2 + \rho_0^2 + l\lambda\sqrt{z_0^2 + \rho_0^2} \quad 0 \leq l \leq 2n+1 \quad (20)$$

Para el caso de  $\rho_0 = 0$ , tomando  $x = z/z_0$ ,  $y = \lambda/z_0$ , sustituyendo en 19 y redefiniendo  $w_l$  se obtiene:

$$w_l = \sqrt{\left(\frac{1\lambda}{2}\right)^2 + ly + x^2} \quad 0 \leq l \leq 2n+1 \quad (21)$$

Teniendo en cuenta estos últimos cambios, la ecuación 18 se transforma en la siguiente relación:

$$\frac{I}{I_0} = \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{(-1)^{l+j} z^2 \text{Cos}(k(w_l - w_j))}{w_l w_j} \quad 0 \leq l \leq 2n+1 \quad (22)$$



**Figura 4.** Croquis de la placa zonal.

Evaluando la ecuación 21 se obtiene la intensidad de la onda difractada por la placa zonal a lo largo del eje axial en función del número de anillos. La Figura 5 muestra esta dependencia para  $\lambda = 633 \text{ nm}$  y una posición del máximo principal fijada en 100 mm. Obsérvese que los máximos se van estrechando en la medida que el número de anillos se incrementa pero que no cambian de posición, mostrando como era de esperarse un comportamiento análogo a una red de difracción. Nótese también en la Figura 5-d que los máximos de intensidad disminuyen su valor en la medida que su posición se acerca a la placa zonal.

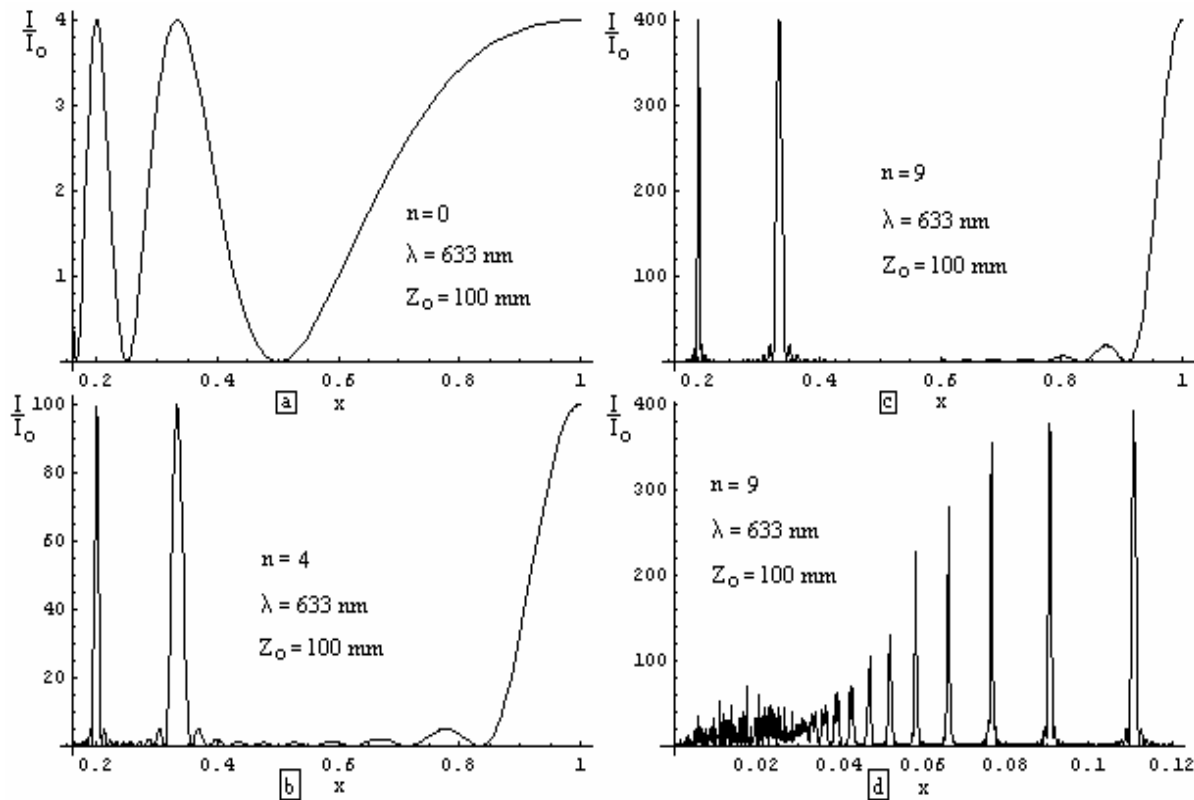
## 7. CONCLUSIONES

Encontrada una función escalar (ecuación 2) y sobre la base de las características propias de las ondas electromagnéticas en medios homogéneos, isotrópicos y lineales, se obtuvo por primera vez la ecuación vectorial (6), consecuente con el Principio de Huygens. Esta ecuación vectorial describe correctamente la propagación de los frentes de ondas planos en el medio en cuestión, en plena concordancia con dicho principio. Se demostró que las soluciones de los problemas que pueden plantearse con su ayuda, satisfacen la ecuación homogénea de Helmholtz, como corresponde a regímenes estacionarios.

Las condiciones iniciales y de contorno, para los problemas que pueden plantearse con la ayuda de esta nueva formulación del Principio de Huygens, se establecen por medio de la ecuación 7 y por la integral de esta última por el área correspondiente al problema en cuestión. También se satisfacen las condiciones de Sommerfeld, garantizándose de esta forma la unicidad del problema tratado.

Por otro lado, partiendo de la nueva formulación y considerando esféricos los frentes de ondas de las fuentes secundarias, se obtuvo una expresión para la densidad de energía espacial de las ondas secundarias (ecuación 8), realizándose un análisis del comportamiento de esta función.

Al considerar los casos de la placa zonal y de la abertura circular, se demostró que con la ayuda de esta nueva formulación puede llegarse a resultados analíticos exactos, demostrándose de esta forma su sencillez. En los casos considerados como ejemplos se obtuvieron de forma exacta las intensidades de los campos eléctricos. Se hizo un análisis de la forma funcional de estos campos y se compararon los resultados con los de la teoría de Fresnel. Los resultados válidos de la vieja formulación de Fresnel fueron corroborados, en tanto que se obtuvieron nuevos resultados más acorde a la realidad en los casos donde la teoría de Fresnel falla en sus predicciones.



**Figura 5.** Las gráficas muestran la dependencia de la intensidad en función de la posición ( $x = z/z_0$ , siendo  $z_0$  la posición del máximo principal). (a) Para una abertura circular, (b) para cuatro anillos, (c) para nueve anillos. En la figura (d) se observa el patrón para distancias cercanas a la placa zonal para nueve anillos, en donde los máximos disminuyen su valor.

## REFERENCIAS

- [1] STAMNES, J.J. (1986): "Waves in focal regions". Hilger, Bristol.
- [2] BORN, M. and E. WOLF (1983): "Principles in Optics" 6<sup>th</sup> ed. Pergamon, Oxford.
- [3] HOPKINS, H.H. (1943): "The Airy disc formula for systems of high relative aperture". **Proc. Phys. Soc. London** 55, 116.
- [4] RICHARDS, B. and E. WOLF (1959): "Electromagnetic diffraction in optical systems". **Proc. R. Soc. London, Ser. A** 253, 358.
- [5] LI, Y. and E. WOLF (1984): "Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different Fresnel numbers", **J. Opt. Soc. Am.** A1, 801.
- [6] MIELENZ, KLAUS D. (1998): "Algorithms for a Fresnel Diffraction at Rectangular and Circular Apertures", **J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.** 103, 497.
- [7] SHEPPARD, C.I.R. and I.I. COOPER (2004): "Fresnel diffraction by a circular aperture with off-axis illumination and its use in deconvolution of microscope images", **J. Opt. Soc. Am.** A21, 540-545.
- [8] ROMERO, J.; O. CALZADILLA y L. HERNÁNDEZ (2000): "Principio de Huygens para las ondas planas monocromáticas y difracción por una abertura circular", **Revista Cubana de Física** 17, 10.