Rev. Cub. Física vol.23 No. 2 (2006) p.107-113
ISSN: 0253-9268. Original paper

Revista Cubana de Física

Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana.
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

Caos Clásico: un enfoque histórico

Alfo José Batista Leyva

Departamento de Física General y Matemáticas,
Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas.

Recibido el 15/07/2006. Aprobado en versión final el 13/4/07

Sumario. La popularización de los conceptos asociados con el estudio de los sistemas complejos ha provocado que elementos relacionados originalmente con la Teoría del Caos se hayan vuelto de aplicación común en áreas muy alejadas de aquella en la cual fueron definidos. Esto ha traído consigo la perdida de precisión en las formulaciones, y ambigüedad, las cuales son poco deseables en la ciencia. En este trabajo se hace un resumen de la historia de la Teoría del Caos, precisando conceptos esenciales de la misma muy empleados en otros campos (por ejemplo, en las ciencias sociales), como el de atractor, atractor extraño etc., así como sus rangos de aplicación. Se hace una cuantificación de las posibilidades de un sistema de mostrar características caóticas a través de los exponentes de Lyapunov y, por último, se trazan líneas generales que deberían ser seguidas por todo aquel que quiera utilizar estas herramientas en su trabajo de investigación.

Abstract. While the growing interest in the so called Chaos Theory has provoked the application of its fundamentals in areas that are far from the original, at the same time a remarkable lack of precision in the formulations has risen, together with ambiguity, which are absolutely undesirable in science. In the present contribution, a brief history of Chaos Theory is exposed, making points on key concepts that are often used in other areas (for instance social sciences), like attractor, strange attractor and so on, and their range of application. A quantification of chaos is made through the so called Lyapunov exponents, and, finally, an outline of a general procedure is exposed that should be followed by all those involved in chaos research.

Palabras clave. Caos, aplicaciones, 05.45.Gg; historia de la ciencia, 01.65.+g

1 Introducción

La ciencia, para lograr la comunicación entre sus ramas, necesita de un sistema de conceptos no ambiguo, que al pasar de un campo al otro se redefinan o precisen. Usar conceptos imprecisos implica que aparezca un muro de incomunicación entre las distintas ramas. En un ámbito revolucionario como el que primó en el surgimiento de la teoría del caos, y el que está presente al parecer en los estudios sobre los sistemas complejos, la comunicación entre los distintos campos que se entrecruzan es inevitablemente parcial[1]. Así, debe ser labor constante la depuración del corpus científico de conceptos imprecisos y formulaciones antropocéntricas.

Una de las fuentes básicas de imprecisiones es el uso de conceptos que tienen sus raíces en el lenguaje cotidiano fuera de su ámbito original. Es difícil concebir un concepto más fuertemente enraizado en la cultura contemporánea que el concepto de caos. Si se le pregunta a cualquier persona qué entiende por caos, por lo general la respuesta vendrá acompañada por la descripción de algo desordenado, sin regla que rija su estructura. Esto está asociado con el hecho de que en prácticamente todas las culturas clásicas occidentales, el caos es el desorden primigenio de la naturaleza, que se contrapone al orden establecido a posteriori por algún demiurgo. Así, en la Biblia, el caos es descrito como un lugar de desorden, sin forma ni concierto, lleno de confusión y a veces vacío o irreal. Este concepto bíblico del caos se ha transculturado, y es un elemento que se ha impregnado en el conocimiento común. Al difundirse lo que en física se conoce como Teoría del Caos, el referente cultural básico que proveyó de sentido semántico al término fue esta idea intuitiva, lo cual ha provocado la proliferación de inexactitudes y errores de concepto. La explicación de esta teoría por escritores de divulgación científica que explotan lo externo sin profundizar en las esencias ha contribuido a aumentar la confusión, no sólo en el público en general, sino también en aquellos que tratan de aplicar conceptos de dicha teoría en regiones alejadas de la original.

Lo dramático es que el caos es un concepto muy popular en la cultura moderna. En el buscador Google se reportan unos 56 000 000 de páginas que tratan dicho tema con enfoques de distinto tipo. Y esa es la fuente principal de búsqueda de información del hombre de nuestra era. Las páginas con contenido de valor científico, como la revista *Chaos*, no son accesibles al público en general, mientras que las páginas no especializadas sí lo son.

Así, con el auge en nuestro país de lo que se algunos llaman "Ciencia de la Complejidad", donde una teoría aún por hacer se encara desde puntos de vista muy variados, tanto en enfoque como en rigor conceptual, los principios de la Teoría del Caos, que de alguna manera se encuentran asociados con los sistemas complejos, requieren ser revisados en aras de la precisión de sus alcances de principio.

Es por esto que nos proponemos hacer una revisión a las ideas esenciales de la Teoría del Caos Clásico, precisando los conceptos esenciales que se han extendido desde dicha teoría y han invadido otras áreas del pensamiento humano, a veces muy alejadas de la original.

2 Caos

2.1 Breve historia del caos. Aunque la ola actual de estudio del caos puede decirse que comenzó en el año de 1975 con la publicación por Li y Yorke de un artículo titulado "Período tres implica caos"[2], las ideas básicas de dicha teoría estuvieron en las mentes de los principales pensadores de los siglos XIX y principios del XX.

Tres fueron las vías que confluyeron en este campo:

1- El estudio de sistemas dinámicos formados por más de dos cuerpos.

2- El estudio de la hipótesis ergódica.

3- El estudio de osciladores no lineales.

Luego de la invención del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibnitz, el objetivo fundamental de la mecánica como ciencia del movimiento fue encontrar soluciones analíticas que describieran la dinámica exacta de un sistema físico. La formulación del ideal de la mecánica clásica generalmente se asocia con el nombre de Laplace (recordar la frase "Un intelecto que en un momento dado conociese todas las fuerzas de las cuales está animada la naturaleza, y la situación de los seres que la componen, y que fuese lo suficientemente vasto como para poder someter todos estos datos al análisis, abarcaría en la misma fórmula el movimiento de los cuerpos mayores del universo, y el del átomo más ligero; nada sería incierto para él, y el futuro, al igual que el pasado, estarían presentes ante su mirada"[3]). Pero 100 años antes de que se dijeran estas palabras, Leibnitz escribió "todo en el mundo procede de manera matemática, esto es, infalible, de forma tal que si alguien posee un conocimiento suficientemente profundo de la parte interna de las cosas y al mismo tiempo tiene memoria e inteligencia suficiente para conocer todas las circunstancias y tenerlas en cuenta, será un profeta, y podrá ver el futuro reflejado en el presente como en un espejo"[4].

Sin embargo, este programa fue muy difícil de seguir. El método introducido por Newton para integrar el sistema, y que consiste en encontrar una magnitud que se conserve manteniéndose constante en el tiempo para de ahí colegir las coordenadas y el *momentum* de las partículas bajo estudio y que dio resultados exitosos al calcular el movimiento de dos cuerpos que interactúan gravitatoriamente, falló estrepitosamente al tratar de aplicarlo al problema de tres cuerpos.

Entonces se utilizó un nuevo enfoque: a partir de un problema integrable, introduciendo pequeñas perturbaciones, se encontraba la solución de un problema no integrable a través de aproximaciones sucesivas. Es sorprendente la cantidad de problemas de este tipo que se resolvieron, dada la limitada cantidad de sistemas realmente integrables que existen. Sin embargo, el método no siempre era aplicable. Por ejemplo, el problema de tres cuerpos (v. gr. el Sol, la Tierra y la Luna) no admitía ninguna de las soluciones calculadas. El primer signo de dificultades de principio llegó a través de la demostración de un teorema por Burns, que estableció que no hay magnitudes que se conserven en dicho problema, y dependan de manera polinomial de la coordenada y el momento. Si existían dichas magnitudes, debían tener un comportamiento más complicado.

El ideal de Leibnitz y Laplace tenía un defecto aún más profundo: es imposible conocer las condiciones iniciales de un problema con exactitud infinita. En el año de 1873 J. C. Maxwell escribía: "*Es una doctrina metafísica que a partir de iguales antecedentes se obtienen iguales consecuentes. Pero esto no es muy útil en un mundo en el cual los antecedentes nunca se repiten y nada ocurre dos veces... El axioma de la Física debe ser 'de antecedentes similares consecuentes similares'... pasamos de la igualdad a la similitud, de la exactitud absoluta a la aproximación. Hay ciertas clases de fenómenos en los cuales un pequeño error en la data sólo introduce un pequeño error en el resultado**, en otros más complicados puede ocurrir la inestabilidad, aumentando el número de estos casos según aumenta el número de variables dinámicas***." [5].

Un premio ofrecido por la revista *Acta Mathematica*, y dotado de 2 500 coronas por el rey Oscar II de Suecia y Noruega ayudaría a encontrar una nueva ruta para resolver dicho problema. Uno de las preguntas matemáticas formuladas fue la siguiente: "Dado un sistema de puntos de masa arbitraria que interactúan entre sí de acuerdo a las leyes de Newton, bajo la suposición de que dos puntos nunca colisionan, tratar de encontrar una representación de la coordenada de cada punto como una serie de una variable que sea una función conocida del tiempo y que la serie converja uniformemente para todos sus valores".

La solución de dicho problema dada por Poincaré ganó el concurso. Este demostró que no existen magnitudes que se conserven y sean analíticas en el momento y la coordenada. De hecho, aunque ganó, no respondió la pregunta formulada. Ni siquiera demostró que no puedan existir soluciones analíticas de dicho problema, lo que demostró es que no existen magnitudes que se conserven y se integren. Desde el punto de vista filosófico Poincaré llegó a conclusiones importantes acerca de la predictibilidad de los sistemas dinámicos; en su libro *Ciencia y Método* escribió: "*incluso si las leyes naturales no tuvieran secretos para nosotros, sólo podríamos conocerlas de manera aproximada. Si esto nos permite predecir la situación siguiente con igual exactitud, esto es todo lo que necesitamos y podemos decir que el fenómeno ha sido predicho, que es gobernado por leyes. Pero no siempre es así:* ***puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final***"[6].

Un segundo problema que llevó a la consideración del caos dinámico, fue la hipótesis ergódica de Boltzmann. Para poder calcular sus promedios en la mecánica estadística, Boltzmann tuvo que hacer una suposición fuerte: considerar que el promedio por los estados posibles es igual al promedio en el tiempo. O dicho de otra forma, que el sistema ocupará por igual tiempo todos los estados del sistema permitidos por las leyes de conservación. Poincaré reformuló esta idea, diciendo que el sistema se acercará tanto cuanto se desee a cualquier punto del espacio de fases. Probar la hipótesis ergódica se convirtió en un problema muy serio. Las líneas de investigación fueron dos: Una de ellas se dedicó a estudiar la topología del espacio de fases al considerar los sistemas como una transformación en si mismos de espacios con medida. El concepto de entropía topológica introducido por Kolmogorov como la razón de cambio del número de trayectorias accesibles por el sistema permitió clasificar los sistemas físicos bajo estudio por la topología de su espacio de fases.

Por otra parte se comenzó la búsqueda de sistemas ergódicos. Un sistema ergódico no puede tener órbitas estables ya que en principio perdería su ergodicidad. El estudio del movimiento de bolas de billar en espacios de curvatura negativa introdujo un sistema que produciría resultados de largo alcance al introducir Birkhoff y Morse la dinámica simbólica para estudiar las órbitas posibles[7].

De la colaboración entre Steven Smale y un grupo de matemáticos soviéticos surgió en el año 1967 un artículo titulado "Sistemas dinámicos diferenciables"[7]. En dicho trabajo se traza una estrategia para pasar de una ecuación diferencial local a la descripción topológica global del espacio de fases del sistema dinámico.

Por último es importante mencionar el antecedente de los trabajos de Lord Rayleigh en el estudio de los instrumentos musicales. Para poder reproducir características básicas de dichos instrumentos, como la generación de más de un tono, hubo de introducir modelos realistas de un sistema masa - resorte más fricción, provocando la aparición de no linealidad.

Lo sorprendente es que a principios del siglo pasado estas ideas estaban rondando la mente de muchos físicos y matemáticos, sin embargo no hubo un desarrollo claro de la teoría física, si exceptuamos los estudios de Birkhoff. Al parecer hay dos causas fundamentales para esto. Primero, el curso fundamental de pensamiento se encauzó en la teoría cuántica y en las teorías de la relatividad, al cual se dedicó el mayor número de investigadores. En segundo lugar hay una razón meramente técnica, pero decisiva. Para estudiar de manera eficiente la solución de una ecuación diferencial no lineal hay que hacer un volumen enorme de cálculos numéricos, los cuales son prácticamente irrealizables sin el auxilio de medios de cómputo electrónico, que comenzaron a ponerse al alcance de los investigadores en la década del 60, y se convirtieron en una herramienta común en la década de los 80. Así, el estudio del caos tuvo que esperar largos años, en los cuales sólo hubo avances en las matemáticas.

El artículo "Flujo determinístico no periódico"[8] fue publicado en el año de 1963 por el meteorólogo Edward Lorenz; en él por primera vez se estudió un sistema de ecuaciones diferenciales determinístico con una clara dependencia de las condiciones iniciales. Lorenz comenzó trabajando con un sistema de 12 ecuaciones diferenciales, que él usó para hacer una simulación del tiempo meteorológico, encontrando que una pequeña variación en las condiciones iniciales provoca que en el transcurso del tiempo las trayectorias del objeto se separen de manera drástica, dando lugar a la impredectibilidad del "tiempo meteorológico" simulado por el sistema. Luego Lorenz comenzó a buscar sistemas de ecuaciones de menor dimensión que mostraran esta característica. Su famoso resultado es el sistema de 3 ecuaciones diferenciales que describe la formación de una celda convectiva, y tiene la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = xz + \rho x - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

donde **x** es el flujo convectivo, **y** la distribución horizontal de temperaturas y **z** la distribución en altura. Los parámetros son $\boldsymbol{\sigma}$, la viscosidad que se opone a la convección térmica; $\boldsymbol{\rho}$, la diferencia de temperatura entre la parte superior e inferior de la celda convectiva y $\boldsymbol{\beta}$, la razón alto ancho de la celda. Son ecuaciones totalmente deterministas, ya que ninguno de los términos tiene carácter estocástico, y son no lineales. En la figura 1 se muestra el comportamiento de (x, y, z) de dicho sistema.

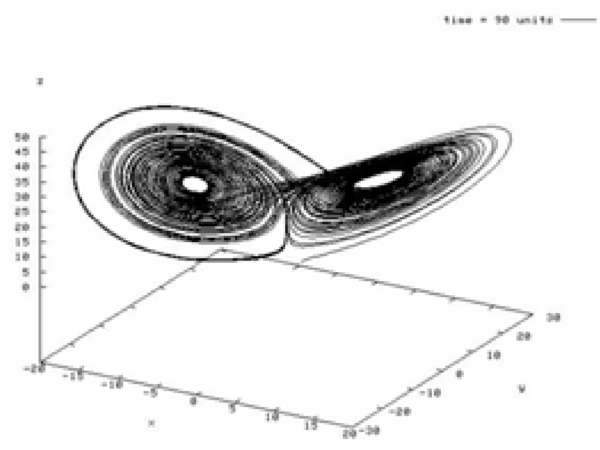

Figura 1: Evolución del atractor de Lorentz para una selección de las condiciones iniciales.

Lo interesante de las ecuaciones es que el comportamiento del sistema depende de manera muy intensa de las condiciones iniciales. En este sentido se introdujo en la ciencia moderna el concepto de caos. También se ha hecho común hablar de "efecto mariposa"[9] refiriéndose a un artículo publicado por Lorentz donde por primera vez se formuló el término.

2.2 Sistemas Dinámicos. En un sistema dinámico el Universo es observado como una función del tiempo. Si tenemos información suficiente sobre el estado del sistema en un instante dado, así como de las leyes que lo gobiernan, podremos colegir sobre el futuro de dicho sistema. Eso se aprendió del primer gran sistema dinámico estudiado: el movimiento de los astros en la esfera celeste.

En general, el estado de un sistema dinámico estará determinado por el conocimiento de un número determinado **d** de variables, las *variables dinámicas* del sistema (v. gr. posición e impulso). Así, definiendo el *espacio de fases* **M** como un espacio *d*-dimensional, donde en cada eje se representa una de las variables dinámicas, el estado del sistema estará representado unívocamente por un punto en dicho espacio. Cualquier cambio en el sistema se reflejará como un cambio en la posición del *punto representativo* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$. La evolución temporal de dicho punto se denomina *dinámica* del sistema, y la función $\mathbf{f}^{\,t}$ que nos dice la posición del punto en el momento **t,** *regla de evolución*.

Las reglas de evolución pueden ser determinísticas o estocásticas. En el primer caso la regla está definida unívocamente, mientras que en el segundo hay algún término que cambia de manera impredecible. En lo que sigue estudiaremos sistemas dinámicos determinísticos, en los cuales aparece el caos. Aunque en principio en un sistema determinístico la regla de evolución toma un punto del espacio de fases y lo convierte exactamente en otro punto, no siempre es esto posible. Las reglas de evolución pueden ser parcialmente desconocidas, como ocurre con los sistemas de predicción del tiempo meteorológico; incluso pueden existir puntos del espacio de fases que no tengan una trayectoria definida. En lo que sigue no tomaremos en cuenta estas excepciones.

Por definición la regla de evolución opera $f^t : M \to M$, y nos dice dónde se encuentra un punto dado luego de un tiempo **t**. Al par (**M**, $\mathbf{f}^{\,t}$) se le denomina *sistema dinámico*. Si el tiempo es una variable real (o sea, continua) la evolución del sistema se denomina *flujo*. Si es una variable que evoluciona en saltos discretos en el tiempo (como en una imagen estroboscópica) se habla de un mapa.

Dado un punto x_0 la regla de evolución traza una serie de puntos $x(t) = f^t(x_0)$, la llamada *trayectoria a través de* $\mathbf{x_0}$. El subconjunto de **M** que pertenece a la trayectoria de un punto $\mathbf{x_0}$ dado se llama *órbita de* $\mathbf{x_0}$. Para un flujo, una órbita es una curva continua, en un mapa una sucesión de puntos.

En un sistema dinámico existen distintos tipos de trayectorias, siendo las más estudiadas en la mecánica clásica las estacionarias, periódicas y aperiódicas. Las periódicas, caracterizadas por $f^t(x) = f^{t+T}(x)$, siendo **T** el período, constituyen el núcleo de la Mecánica Clásica, por ser sistemas integrables. Sin embargo, la realidad confirma que para los sistemas dinámicos genéricos, las órbitas periódicas son una excepción: la mayoría son aperiódicas. Dichas órbitas se pueden clasificar en dos tipos. En el primero están aquellas órbitas en las cuales cualquiera sea el entorno abierto alrededor de un punto, la trayectoria no regresa a dicho entorno:

$$(x_0 \in M)(\exists M_0(x, \delta) \subset M):$$
$$(f^t(x_0) \notin M_0)(\forall t \geq t_{min})$$

En este caso **x** se denomina punto de escape. Por otra parte, si se cumple

$$(x_0 \in M)(\exists M_0(x_0, \delta) \subset M):$$
$$(f^t(x_0) \in M_0)(\text{para algún } t \geq t_{min})$$

a **x** se le denomina recurrencia o punto de no escape. Un punto es recurrente si su órbita retorna un número infinito de veces a un entorno abierto alrededor de él. Se define el *conjunto recurrente* $\mathbf{\Omega}$ como el conjunto de todos los puntos recurrentes del sistema. Este conjunto es básico para la comprensión de su dinámica a largo plazo.

Consideremos ahora la evolución temporal de un conjunto de puntos que inicialmente están conectados entre sí. Si la evolución futura del sistema provoca que dicho conjunto "mapee" en sí mismo, entonces el flujo global se contrae sobre un subconjunto de **M**, el cual recibe el nombre de *atractor*. El conjunto de todos los puntos cuya trayectoria cae en el atractor luego de transcurrido el tiempo se denomina *cuenca de atracción*.

Los atractores pueden ser de distintos tipos. Un péndulo simple con fricción siempre se detendrá en su posición de reposo, por lo que el atractor en dicho caso será un punto. Si no se considera la fricción, repetirá la misma trayectoria de manera interminable, por lo que el atractor en dicho caso será una trayectoria cerrada. En el año 1971 D. Ruelle y F. Takens publicaron un artículo titulado "Acerca de la naturaleza de la turbulencia"[11], en el cual aparece, definido de manera muy difusa, un nuevo término, que se ha difundido más allá de todo lo imaginable: *atractor extraño*. Lo definieron a través de sus propiedades: un atractor estable, que representara el estado final de un sistema que estuviese sometido a un ambiente ruidoso, con un bajo número de dimensiones, no periódico, que provocara órbitas infinitas en un espacio limitado (o sea, tener propiedades de un fractal... pero aún Mandelbrot no había acuñado el término[12]). Los autores no conocían el trabajo de Lorentz en 1963, donde ya se había estudiado uno de dichos atractores.

La definición precisa de un atractor extraño es complicada, ya que, incluso al hacer cálculos numéricos de órbitas, es difícil separar un atractor extraño de un atractor periódico de período largo. Así que entenderemos por un atractor extraño a un *atractor recurrente aperiódico*. También se acostumbra a definirlo como un conjunto atractor que tenga medida cero en el espacio de fases y que presente dimensión fractal.

Por el contrario, si el conjunto recurrente puede ser rodeado por un volumen conexo del espacio de fases $\mathbf{M_0}$ tal que casi todos los puntos que están en $\mathbf{M_0}$ pero no en $\mathbf{\Omega}$ abandonan $\mathbf{M_0}$, el conjunto $\mathbf{\Omega}$ se denomina un repulsor. El ejemplo más sencillo de repulsor es el llamado mapa logístico $y_n = x_n^2; x_{n+1} = y_n$. Con ayuda de una calculadora no es difícil encontrar que los puntos $x = \pm 1$ resultan repulsores. En efecto, los puntos $|x| > 1$ tienen una evolución que los va alejando al infinito. Por su parte, aquellos que $|x| < 1$ evolucionarán acercándose a cero.

Un concepto básico para estudiar los sistemas dinámicos es el de *sección de Poincaré*. Diseñar imágenes de atractores no es fácil, incluso en el caso 3D. Típicamente, las órbitas tuercen sus trayectorias de forma complicada, debido a la reducción del espacio topológico que causa el atractor, creando una figura cuya estructura interna no es visible. Hacer proyecciones de la órbita en un plano introduce artefactos, por ejemplo que las órbitas se crucen repetidamente. Una técnica que revela mejor la estructura interna del atractor es la de diseñar la llamada sección (o superficie) de Poincaré. Esta sección es una hipersuperficie **P** de dimensión **d – 1**. Si el espacio de fases es 3D, la sección de Poincaré será una superficie 2D. La intersección de una sección de Poincaré con una trayectoria produce un mapa conocido como Mapa de Poincaré: $P(x) = f^t(x) \bigcap P$.

Una forma de especificar el mapa de Poincaré es a través del tiempo de vuelo, que es la función $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ que caracteriza el tiempo que tarda el punto representativo en regresar a la sección $x' = P(x) = f^{\tau(x)}(x)$.

La definición de la sección de Poincaré se puede especificar implícitamente a través de una función **U(x)** que cumpla **U(x)= 0** para los puntos de la superficie. En un atractor 3D una forma posible es tomar como función aquella que haga cero una de las coordenadas del sistema. De esta forma se observará la intersección de la órbita con el plano, que para cada evento será un punto. Por lo general se añade la llamada condición de orientación de la superficie, para solo tener en cuenta uno de los encuentros de la órbita con la sección, y eliminar la posibilidad de contactos tangenciales. Esto se puede hacer escogiendo un signo para el producto escalar entre el gradiente de la función y el campo de velocidades de la órbita, por ejemplo positivo:

$$(\vec{v} \cdot \nabla U(x)) = \sum_{j=1}^{d} v_j(x_n) \partial U_j(x_n) > 0; \qquad U(x_n) = 0 .$$

En la figura 2 se observa el mapa de Poincaré del movimiento de uno de los átomos de una molécula triatómica de van der Waals. Si se comienza a hacer la amplificación de dicha figura, y aumentar el número de veces que la órbita intercepta a sección, el mapa se hace más detallado, y muestra una rica estructura, con regiones toroidales y otras que muestran una disposición desordenada. De esta forma, aunque se pierde una parte de la información, otra parte adquiere mayor relieve.

2.3 Cuantificación del caos. Un sistema determinístico es aquel cuyo estado presente está *en principio* determinado por sus condiciones iniciales, en contraste con un sistema estocástico, para el cual las condiciones iniciales determinan el estado presente sólo de manera parcial, debido al ruido u otras circunstancias externas fuera de control. Así, el estado actual refleja las condiciones iniciales más el ruido que ha encontrado en su historia. Si el ruido es suficientemente intenso, puede que luego de un tiempo de evolución el sistema "olvide" las condiciones iniciales.

Supongamos un sistema dinámico, totalmente determinístico, en el cual dos trayectorias que comiencen muy cerca, a una distancia $\delta x(0)$ se vayan separando, de forma tal que luego de transcurrido un tiempo **t**, se encuentran a una distancia $\delta x(t) \approx L$ donde **L** es la extensión lineal del sistema completo (figura 3). Esta dependencia de las condiciones iniciales se puede cuantificar a través de la expresión

$$|\delta x(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta x(0)|$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ representa la velocidad media de separación de las órbitas y se conoce como *exponente de Lyapunov*. Su definición es:

$$\lambda = \lim_{\substack{t \to \infty \\ \delta x(0) \to 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|}$$

Así los valores de λ determinan el comportamiento del sistema de la siguiente forma:

$\lambda < 0$. Las órbitas son atraídas a un punto fijo estable o a una órbita periódica estable. Estos valores son característicos de sistemas disipativos (como el péndulo amortiguado).

$\lambda = 0$. Valor típico de los sistemas físicos conservativos. Las órbitas se mantienen a una distancia fija entre sí. Por ejemplo el diagrama de fases de dos péndulos de igual frecuencia y diferente amplitud, sin disipación.

$\lambda > 0$. Las órbitas son inestables. Los puntos, no importa cuán cercanos estén inicialmente divergirán a cualquier separación arbitraria, y todos los puntos del espacio de fases serán visitados.

En este último caso, para cualquier exactitud finita de los datos iniciales $|\delta x(0)| = \delta x$ (o consecuentemente, para dos puntos separados dicha distancia), la dinámica del sistema será predecible sólo durante un tiempo finito llamado *tiempo de Lyapunov,* dado aproximadamente por:

$$T_L \approx -\frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{\delta x}{L}\right|$$

Esta es la primera condición necesaria para la aparición del caos, pero no es suficiente. En última instancia si las órbitas se alejaran indefinidamente, el sistema iría perdiendo sus contornos sin conducir a un comportamiento interesante. Es además necesario que exista la mezcla de las órbitas entre sí, su recurrencia en una región del espacio. Esto es, aunque las órbitas se separan localmente, la dinámica del sistema esta confinada a una región finita del espacio de fases, de forma tal que trayectorias separadas se re encontrarán un número infinito de veces en el futuro del sistema.

Para caracterizar la propiedad del espacio de fases de contener un número de órbitas topológicamente diferentes se introdujo el concepto de entropía topológica. Esta entropía mide la razón de incremento del número de órbitas al aumentar la longitud de éstas. Dicha entropía está relacionada con el incremento del número de órbitas periódicas según la expresión

$$N(n) \propto e^{hn}$$

donde **n** es la longitud de la órbita y **h** es la entropía topológica. El término entropía está asociado con que el número de órbitas nos define el número de particiones que se puede hacer del espacio de fases.

Otra magnitud que nos indica que estamos en presencia de un sistema caótico es un espacio de fases con estructura fractal, esto es, con autosimilitud e invarianza de escala.

2.4 Definición de caos. Hemos estado hablando de caos sin hacer ninguna definición precisa del término. Quizás la causa es que no hay en la literatura dos definiciones que sean coincidentes, aunque todas tengan elementos comunes. Hemos visto características cuantitativas que debe cumplir el sistema:

a) Exponentes de Lyapunov positivos,

b) Entropía topológica positiva.

c) Estructura y dimensión fractal en el espacio de fases.

Estas características son asintóticas, por lo que en un sistema concreto será muy difícil precisar si las posee. En cualquier caso en un sistema que presente caos estarán presentes también las siguientes características globales:

1- Determinismo: Las ecuaciones que describen los sistemas donde aparece el caos clásico no deben tener elementos aleatorios.

2- No linealidad: Los sistemas que presentan caos son no lineales, al menos débilmente.

3- Dependencia sensible a las condiciones iniciales: Esta característica se revela cuando analizamos el comportamiento de las trayectorias dentro de un atractor, ya que si observamos el atractor como un todo, en última instancia todas las órbitas que pasan por la cuenca de atracción caen en él.

4- Aperiodicidad: Las órbitas de los sistemas caóticos son aperiódicas, aunque en el sistema pueden existir (y de hecho por lo general existen) órbitas periódicas, que son muy importantes para calcular algunos parámetros del sistema.

5- Estabilidad global: Aunque el movimiento de los puntos en el espacio es localmente inestable, los sistemas físicos que se estudian deben tener determinada estabilidad durante un tiempo dado para poder ser estudiados.

De todas formas esta no es una definición, es a lo sumo una enumeración de características que deben cumplir los sistemas caóticos. La siguiente definición es de autoría del filósofo chino Huajue Liu (Universidad de Beijin) y dice:

El movimiento caótico es un comportamiento recurrente, aperiódico, generado a partir de una ecuación determinística no lineal con dependencia sensible a las condiciones iniciales.

¿Cuándo debemos tener en cuenta el caos? Un sistema de muchos cuerpos como el sistema solar en principio admite soluciones caóticas, sin embargo, la predicción de los eclipses, las posiciones de los planetas e incluso de sus satélites se hace sin ningún problema. El concepto de tiempo de Lyapunov, esto es, el tiempo que demora una región del espacio de fases con dimensiones similares a la precisión de la observación, en alcanzar todo el espacio de fases accesible, nos ayuda a discernir cuándo usar dichas ideas. Si el tiempo de observación del sistema es mayor que el tiempo de Lyapunov, entonces es obligado tener en cuenta el carácter caótico del sistema. Así, la teoría tiene amplio uso en cuestiones de mecánica estadística, en sistemas cuánticos y en cuestiones de estabilidad a largo plazo en mecánica celeste (en este caso el tiempo de Lyapunov es enorme al compararlo con la edad del sistema solar).

¿Cómo enfrentar un problema que involucre un sistema caótico?

Ante todo se debe olvidar el paradigma de determinación de las posibles trayectorias del sistema en el espacio de fases: como ya vimos en un sistema con caos sólo podremos conocer éstas en un intervalo de tiempo limitado; la evolución a largo plazo es imposible de predecir. Así, la esencia del método se traslada a la descripción analítica de las características de las órbitas posibles, para con ellas poder calcular promedios sobre el espacio.

La línea global de ataque ha de ser:

1- Determinación de la dimensión intrínseca del sistema. Esto es, se determina el número mínimo de coordenadas que son necesarias para caracterizar la dinámica. Si estas dimensiones son muchas, es poco lo que puede hace la teoría en su estado actual. Sin embargo hay sistemas con muchos grados de libertad, incluso infinitos (por ejemplo el frente de expansión de una llama) que tiene un número limitado de grados de libertad caóticos. En este caso la dinámica caótica está reducida a un número bajo de grados de libertad y puede ser estudiada.

2- Se cuentan y clasifican todas las órbitas topológicamente distintas dentro de un patrón de jerarquías, caracterizadas por su longitud. Las órbitas periódicas que se encuentren son el espinazo sobre el cual se montarán los cálculos, por lo tanto tienen gran importancia.

3- Se calculan las magnitudes del sistema a partir de un formalismo similar al de las funciones de partición de la Física Estadística.

3 Conclusiones

La teoría del caos, como ya dijimos, es altamente popular, y muchas veces se usa metafóricamente en campos alejados de su esfera usual. Otras veces las metáforas se toman como hechos establecidos. Como ya vimos, el caos tiene características cuantitativas que permiten detectarlo, y un comportamiento general que, según la definición antes expuesta, permiten caracterizar un sistema que lo presente.

Hasta el momento, la teoría es sólo aplicable a sistemas con un número bajo de dimensiones intrínsecas. Además, la dificultad en separar la dinámica asociada con el caos de la provocada por el ruido ha hecho difícil aplicar la teoría en las ciencias de la vida y la economía, aunque en los últimos tiempos se han obtenido avances significativos. En las ciencias de la conducta los resultados alcanzados han sido realmente pobres.

Referencias

1. T. S. Kuhn. The structure of scientific revolutions, 2nd edition. The University of Chicago Press. Chicago (1970).
2. T-Y. Li, J. Yorke. Period three implies chaos. American Mathematical Monthly, 82 (1975) 985.
3. Pierre Simone de Laplace. Essai philosophique sur les probabilites. 2da ed. Paris 1814.
4. G. W. Leibnitz. Von dem Verhängnisse. En “Obras completas en 4 tomos”. Tomo I. Ed. Misl. Moscú (1980).
5. J. C. Maxwell. Teaching Nonlinear Phenomena- I, (1873) 47.
6. H. Poincaré, Ciencia y método. Balsal Editores, Morelia. (1978).
7. S. Smale, Differentiable dynamical systems. Bulletin Am. Math. Soc. (1967) 747.
8. E. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. J. Atmospheric Sci. 20 (1963) 130.
9. E. Lorenz, Predictability: Does the flap of a butterfly wings in Brazil set off a tornado in Texas? Comunicación a la Convención de la American Asociation for the Advancment of Science. Washington. Dec 29th (1979).
10. P. Cvitanovic et al. Classical and Quantum Chaos. http://chaosbook.com
11. D. Ruelle, F. Takens. On the nature of turbulence. Communications in Mathematical Physics. 20 (1971) 167.
12. B. Mandelbrot. Los objetos fractales. Tusquets Editores. Barcelona 4ta ed. (1996).