Rev. Cub. Física vol.23 No. 2 (2006) p.127-134
ISSN: 0253-9268. Original paper

Revista Cubana de Física
Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana.
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

Experiencias en la enseñanza de la física de los sistemas complejos en la cátedra "Henri Poincaré"

Oscar Sotolongo Costa

Cátedra de Sistemas complejos "Henri Poincaré". Fac. de Física, U.H. osotolongo@fisica.uh.cu

Recibido el 5/06/2006. Aprobado en versión final el 1/12/2006.

Sumario. Se exponen algunas de las experiencias más importantes que se han obtenido al impartir la docencia de la física de los fenómenos complejos, tanto a nivel de pregrado como de postgrado, en la Cátedra de sistemas complejos "Henri Poincaré" a lo largo de varios cursos. Se resalta en particular la inclusión de simulaciones en clase y la implementación de trabajos de laboratorio, tanto experimentales como computacionales.

Abstract. Some of the most important experiences in teaching the physics of complex systems in the "Henri Poincaré" group of complex systems are exposed. Teaching was performed both in the undergraduate and graduate levels for several years. The inclusion of classroom computer simulations and experimental and computational laboratories are highlighted.

Palabras clave. Docencia 89.75.-K, física de los fenómenos complejos 01.40.GB

1 Introducción

En este trabajo, presentado en el evento del taller de la física de la complejidad en el marco del evento internacional "Complejidad 2006", presentamos nuestras (mejores) experiencias en la impartición de la física de los sistemas complejos.

Está claro que la creación de una cátedra dedicada al tema implica como uno de sus objetivos principales la divulgación de estas nuevas tendencias que van teniendo lugar en la física y que en su conjunto pueden clasificarse como "física de la complejidad" para caracterizar el ajiaco conceptual que en realidad es y que tan bien encaja en nuestra idiosincrasia tropical, iconoclasta, sincrética y ecléctica.

Expondremos de forma breve los contenidos en que creemos vale la pena fijar más la atención por las posibilidades de hacer llegar al estudiante de forma no ortodoxa.

También nos detendremos a ver algunos temas en particular, por la resonancia que tienen en la formación de un modo de pensar (y hacer) en física y, quizás, en otros campos del saber.

Así, expondremos nuestro punto de vista acerca de la impartición del tema de sistemas dinámicos, la forma de introducirlos y como llegar por esta vía al concepto de caos determinista, en otra sección se expone un complemento importante, los mapas, en particular el logístico y la ilustración de la vía a l caos por duplicación de período. Los mapas son, como dijimos, un complemento ya que su inclusión en el curso permite introducir aspectos muy importantes tales como el teorema de Kolmogorov-Arnold- Moser y la transición al caos en los sistemas no integrables.

Se expone la forma en que introducimos el concepto de fractal, muy vinculada a la dimensión de Hausdorff.

En la última sección hacemos una "crítica de la criticalidad", no tanto por los recientes trabajos que exponen serias objeciones al concepto de "criticalidad auto organizada" sino más bien (y además) por la forma en que hemos incluido el tratamiento de sistemas que se consideran paradigmas de la criticalidad auto organizada, como las lomas de arena y los terremotos.

En toda nuestra exposición haremos énfasis en la prioridad del rigor, convencidos de que el rigor formal y lógico no solo no esta reñido con la didáctica sino que la ayuda. Un concepto expuesto rigurosamente, no con el falso rigor que todo lo oscurece, sino con el verdadero, que ayuda a razonar, se asimila y aprehende mejor que al ser vulgarizado y deformado en su enseñanza. Esperamos que nuestra exposición así lo demuestre.

La sinergia con las computadoras se expone constantemente, quizás en demasía, por lo que pedimos de antemano disculpas.

2 Contenidos y métodos

El programa incluye los tópicos tradicionales de sistemas dinámicos con la correspondiente profundización en la técnica de las ecuaciones diferenciales, además de la teoría de bifurcaciones y el caos. Vuelos de Levy, criticalidad y otros contenidos de "avanzada" como la física de los fenómenos de roturas y de los medios granulares y redes complejas. Esto quiere decir que los temas tratados, incluso a nivel de pregrado, se relacionan directamente con trabajos de investigación realizados en la Cátedra. En breve ilustraremos esto.

Además, lo dicho anteriormente en relación con las computadoras y la asombrosa sinergia que existe entre estas y los mas diversos campos de actividad humana obliga a emplearlas en el aula durante las clases, claro que no solo para proyectar las presentaciones (Lo cual está muy bien, por cierto), sino para estudiar "en caliente" el comportamiento de diferentes sistemas eventualmente bautizados como "complejos": El péndulo doble, la loma de arena, el caminante de Levy y muchos otros.

Hay (desgraciadamente, todavía en insuficiente cantidad) tareas experimentales como es la medición de dimensiones fractales[2], y trabajos en forma de proyectos, como la construcción de una "máquina de catástrofes", y también, claro está, los "laboratorios computacionales" donde los estudiantes deben profundizar en la aplicación de los métodos numéricos y la simulación de sistemas. Los lenguajes de computación más empleados son Mathematica y Qbasic, sin excluir otros paquetes de cómputo muy útiles[3].

La evaluación no es tradicional, sino que puede consistir en la entrega de tareas por los alumnos o la designación a criterio del profesor de determinados trabajos o proyectos a realizar por algunos estudiantes. Este método se emplea lo mismo a nivel de pregrado que de postgrado.

Hay que tener presente que a llegar el estudiante al curso, conoce, por regla general la mecánica de Newton, y está generalmente imbuido del gran poder de predicción mecánica y el rigor en la descripción mecánica de la naturaleza que proporciona la mecánica clásica, lo cual puede sintetizarse en la frase de Laplace:

"UNA INTELIGENCIA QUE CONOCIERA TODAS LAS FUERZAS QUE ANIMAN LA NATURALEZA, ASÍ COMO LA SITUACIÓN RESPECTIVA DE LOS SERES QUE LA COMPONEN... PODRÍA ABARCAR EN UNA SOLA FÓRMULA LOS MOVIMIENTOS DE LOS CUERPOS MÁS GRANDES DEL UNIVERSO Y LOS DEL ÁTOMO MÁS LIGERO; NADA LE RESULTARÍA INCIERTO Y TANTO EL FUTURO COMO EL PASADO ESTARÍAN PRESENTES A SUS OJOS" (P.S. Laplace, "Los Principios de la Mecánica Celeste")

El tema relativo a los sistemas dinámicos es vital dentro del curso. El pretexto para su inclusión está en la ley de Newton:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x, \dot{x}, t)$$

Donde F es la fuerza ejercida sobre el cuerpo, x su posición y m su masa, si e esta ecuación se disminuye el orden de la derivada, entonces es posible expresar las ecuaciones de movimiento en forma de ecuaciones de primer orden y obtener así un « sistema dinámico »:

$$\frac{dx}{dt} = x_1 \therefore$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1 \\ \dfrac{dx_1}{dt} = F(x, x_1, t) \end{cases}\right\} \text{Sistema Dinamico}$$

El tratamiento de los sistemas dinámicos se guía esencialmente por los textos ya consagrados en este campo (Schuster, Nicolis, Strogatz, etc.). La manera de introducir el caos como sensibilidad a las condiciones iniciales se hace a partir de las ecuaciones de LORENZ:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = (r - z)x - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Y se estudia "experimentalmente" (esto es en la clase, con la computadora) el comportamiento del sistema, desde su comportamiento regular hasta la variación irregular que ya conocemos y se ilustra en la figura 1:

El sistema en su conjunto, gracias a los métodos desarrollados por Poincaré y a la existencia de las computadoras, puede verse en su desarrollo como el caprichoso movimiento de un punto en un espacio llamado "de fases", constituido por las variables del sistema y sus derivadas temporales, donde el tiempo de permanencia en una región de ese espacio es en principio impredecible y depende infinitamente de las condiciones iniciales.

Aquí ilustramos ese comportamiento: esta extraña figura en forma de antifaz atrae siempre al sistema de Lorenz y lo hace moverse entre sus lóbulos (fig. 2). El tiempo de permanencia así como la cantidad de giros en cada uno, etc., son impredecibles. Vale decir, *depende infinitamente de las condiciones iniciales del sistema.* Es recomendable hacer que la computadora construya dos atractores de Lorenz simultáneamente, separados por una pequeña diferencia en las condiciones iniciales. Se comprueba fácilmente que aunque la diferencia en las condiciones iniciales disminuya cien veces, el tiempo en que las trayectorias se separan ostensiblemente no aumenta mucho.

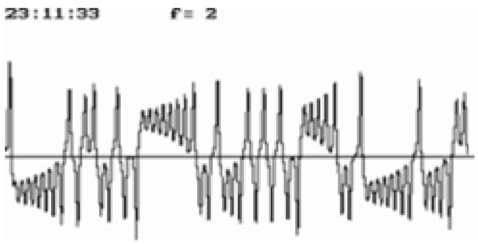

Figura 1. Variación de x vs. t en el sistema de Lorenz

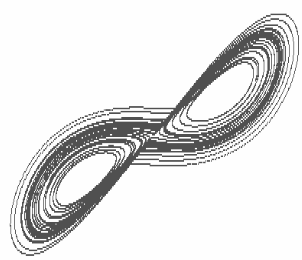

Figura 2. El atractor de Lorenz

El sistema en ese caso se dice que es "caótico" pero observemos que está descrito por ecuaciones diferenciales rigurosamente planteadas. Es entonces un caos que no se ajusta a nuestro concepto intuitivo de lo caótico: un caos *determinista.*

Si ahora decimos que dicho "sistema" es el modelo que elaboró Lorenz para la convección del aire atmosférico, y que este modelo es ya una gran simplificación de las ecuaciones que describen ese movimiento, podemos entender la difícil tarea que tienen ante sí los meteorólogos, que injustamente muchas veces cargan la culpa de un pronóstico errado. Gráficamente hablando, quizás de forma algo poética, el aleteo de una mariposa en una selva amazónica puede dar lugar a la formación de un huracán en las costas de África

Se pone en claro con esto la necesidad del estudio y el empleo de los métodos estadísticos. Ya no se trata sólo de aplicar la estadística en sistemas de los cuales no se conocen bien sus leyes, como el lanzamiento de un dado, la propagación de una epidemia, etc. Se trata también de que es necesario emplear métodos estadísticos en la interpretación de problemas de mecánica cuántica y hasta de problemas en los que la ecuación del movimiento es conocida: sistemas caóticos deterministas.

Pero en realidad la esencia del movimiento caótico se pone en claro con el teorema de Kolmogorov- Arnold-Moser cuando se investiga hasta que punto un sistema hamiltoniano integrable (cuasiperiódico) puede ser perturbado y se comprueba la destrucción progresiva de los toros (toros KAM) a medida que la perturbación aumenta. Eso pone en claro que todo sistema en que el número de constantes de movimiento es menor que el de grados de libertad (La enorme mayoría de los sistemas reales) es caótico. ¡La mecánica determinista de Laplace ha sido destronada!

3 Mapas

Ese es uno de los capítulos más motivantes y que más permite la interacción con las computadoras, tanto en clase como fuera de ella. El ejemplo clásico es el mapa logístico:

$$x_{n+1} = lx_n(1-x_n)$$

donde l es una constante entre 0 y 4; x_n es el valor de la variable en la aplicación n-ésima del mapa. Como se ve, el valor de x en cada aplicación depende de valor en la aplicación anterior.

Muchos sistemas o bien pueden llevarse a este tipo de descripción o gozan (quizás sería mejor decir que sufren) de las mismas propiedades que este mapa. Como ejemplo podemos mencionar la población de colonias de bacterias, donde en ese caso l esta relacionada con el medio externo.

Si en una colonia de microorganismos la población en un instante n es p_n, la de la próxima generación es proporcional a esta:

$$p_{n+1}=lp_n.$$

Entonces al cabo de n generaciones la población sería

$$p_n = p_0 l^n$$

Pero al crecer la población hay competencia por el alimento y debemos sustituir la constante l por una l efectiva $l_{eff.}$

Una forma simple es:

$$l_{eff} = l - ap \quad ; \text{ así:}$$

$$p_{n+1} = lp_n - ap_n^2$$

definiendo $p_n \equiv \frac{1}{a} x_n$:

$$x_{n+1} = lx_n(1-x_n).$$

La ecuación logística representa un caso sencillo de no-linealidad. Su importancia radica en la universalidad de sus propiedades, como veremos más adelante.

La figura 3 muestra la variación de x en el tiempo para distintos valores de la constante l. Como puede verse, el periodo de variación de la población se va duplicando a medida que crece l, hasta que es tan grande que ya se demora un tiempo excesivamente largo en repetirse, o sea es caótica. Este mecanismo de transición al caos se conoce como "duplicación del período". (period doubling en la literatura en inglés).

La variación de la función que estudiamos, es decir los límites entre los que fluctúa dependen de la constante l, como se ve en la figura 4, donde que se muestra la variación del valor de la generación n-ésima en función de l. En realidad esa gráfica es la superposición de muchas generaciones que dan ese resultado final tan curioso, y del cual se destaca también su "invarianza de escala" en determinados lugares.

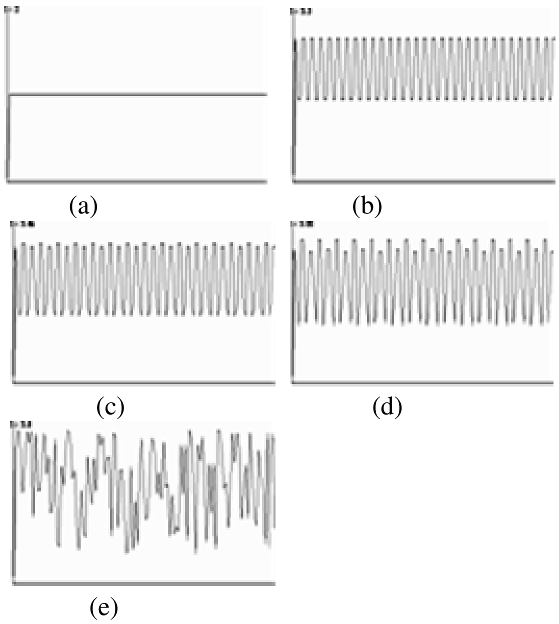

Figura 3. Variación del comportamiento del mapa logístico

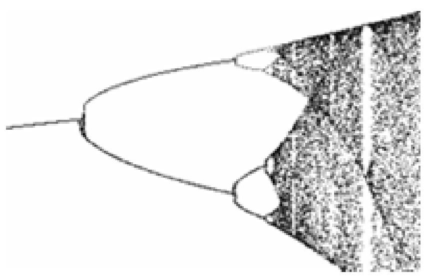

Figura 4. Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico

En cada ramificación de la figura 4 puede observarse la misma estructura, por lo que hablamos de "invarianza de escala" La población en diferentes valores de l tiene un valor, para otros valores va oscilando entre dos valores otras veces entre cuatro, etc. La complejidad del grafico anterior muestra una estructura rica en detalles y un comportamiento con el que es imposible aburrirse.

4 Fractales: la otra geometría

Hasta hace relativamente poco, la geometría creada por los griegos fue símbolo de perfección tanto en su construcción lógica como en su papel de instrumento de análisis de la naturaleza: Una gota de agua puede considerarse una esfera, la trayectoria de un proyectil como una parábola, la de una partícula libre como una línea recta (luego Einstein la convirtió en una geodésica, pero eso no cambia las cosas) y hasta en algunos casos decimos que la Tierra es una esfera, y en general siempre podemos tomar una unidad de longitud adecuada, "típica" para expresar las distancias, y una unidad de tiempo para preguntarnos cuánto más durará la espera del "camello".

Pero la naturaleza rebasa esta descripción: Por ejemplo, las nubes no son esferas, las montañas no son conos y los relámpagos no viajan en línea recta. La complejidad de formas en la naturaleza difiere no sólo en el grado, sino también en la clase de formas de la geometría ordinaria. Se hizo necesaria una geometría que describiera la caprichosa "invarianza de escala" que presentan muchas formas de la naturaleza: el hecho curioso de que el objeto en su conjunto se parece a una parte del mismo. Un buen ejemplo lo constituye esta hoja de helecho generada en computadora (fig. 5):

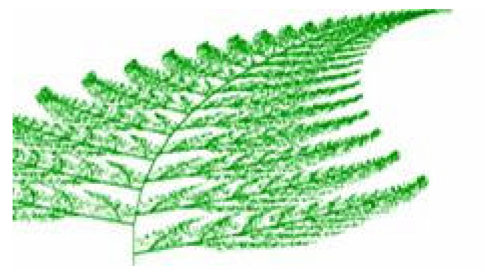

Figura 5. Hoja de helecho generada en computadora

Lo que es aún más revelador: En realidad en este y otros muchos casos en un amplio rango espacial no existe una longitud típica para expresar estas formas.

Se trata de que la naturaleza tiene una geometría "fractal" que exhibe esta invarianza de escala. Su manifestación es omnipresente: desde un papel arrugado hasta la línea de la costa de un país. Incidentalmente, un ilustre colega dijo por nuestros medios de comunicación que "Cuba es más grande que España" porque es mayor la longitud de sus costas. Si así hablamos, entonces el país más grande del mundo es una isla que pudiera construirse a partir de un triángulo equilátero de 1 cm de lado por un método recurrente: La "isla de Koch". Su longitud, como la de todo fractal que se respete, es infinita.

Aquí vemos uno de los lados de la isla de Koch. Al repetirse la misma estructura en todas las escalas, es imposible medir su perímetro. O sea, su perímetro es infinito.

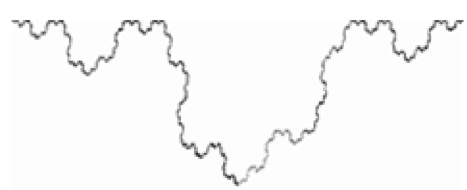

Figura 6. Curva de Von Koch

5 Crítica de la criticalidad

Las sorprendentes y paradójicas propiedades de estos extraños objetos en general no se detallan en los cursos tradicionales, sobre todo si son de pregrado. En nuestro caso hemos preferido introducir el estudio cuantitativo de los fractales a partir de la definición de dimensión de Hausdorff y, a partir de ahí, deducir las fórmulas con que se trabaja en la geometría fractal y sus aplicaciones, con lo cual es más fácil introducir las famosas "leyes de potencia".

Uno de los aspectos que más motivan el estudio de los fenómenos con distribuciones estadísticas de leyes de potencias, además de su simplicidad matemática (aparente), es su ubicuidad en la naturaleza y la sociedad. Además de la ley de Gutenberg-Richter de los terremotos, existe la llamada ley de Zipf de la distribución del tamaño de las ciudades, la distribución de intensidad de rayos X en las manchas solares, etc, etc. Este hecho llamó poderosamente la atención de los investigadores Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld en 1987, y propusieron la idea de la Criticidad Auto-Organizada (SOC, por sus siglas en inglés) como base de todos estos fenómenos. Si bien esta idea ha sido duramente criticada por muchos científicos, es innegable que ha llamado la atención de la comunidad científica internacional sobre ciertos aspectos interesantes de los fenómenos con distribuciones de leyes de potencias, produciendo un fructífero debate en el tema. Ocurre que muchas veces una idea errónea ó parcialmente errónea puede ser más útil al desarrollo de la ciencia que una teoría "correcta" en le sentido ortodoxo de la palabra. El *paradigma* con el que sus autores explican la teoría de la criticidad auto-organizada es la dinámica de la formación de una sencilla pila de arena.

Bak, Tang y Wiesenfeld, en su artículo de *Physical Review Letters* de 1989[1], utilizan simulaciones computacionales para representar cómo se forma una pila de arena "ideal" sobre una superficie horizontal. A través del sencillo modelo utilizado, los autores se abstraen de las leyes de la Mecánica en su forma convencional, y así ahorran parte del enorme tiempo de cálculo que hubiera representado calcular las leyes de Newton en forma exacta para los muchos granos que forman una pila de arena. En el modelo de Bak, Tang y Wiesenfeld (BTW), no se usan granos irregulares como en la arena real, sino que éstos se toman como *cubos*. Los granos se van lanzando, uno a uno, sobre posiciones aleatoriamente escogidas de una superficie horizontal, de modo que van acumulándose sobre ella. La superficie horizontal está dividida en cuadrados, de modo que los cubos pueden ir acomodándose sobre los cuadrados, formando columnas. El acomodamiento de los cubos, en la medida de que van cayendo, siguen ciertas *reglas* bien determinadas, que forman parte del modelo BTW. Si en un sitio de la cuadrícula cae un cubo, y el número de cubos resultante es inferior a 4, el cubo caído se queda en posición. En cambio, si al caer, el número de cubos resultantes llega a 4, los cubos se mueven hacia las 4 cuadrículas más cercanas, de modo que la cuadrícula original queda vacía. Las mismas reglas deben aplicarse entonces a todas las demás cuadrículas sucesivamente, lo cual puede provocar, en principio, un grupo de saltos de cubos entre varias cuadrículas, definiendo una *avalancha.* Una vez que el programa determina que no deben moverse más cubos, se añade un nuevo cubo en una posición aleatoria del sistema, y se vuelven a aplicar las reglas. Y así sucesivamente. La figura 6 ejemplifica la evolución de una avalancha de tamaño 36. *El tamaño lo hemos definido como la cantidad de saltos involucrados en la avalancha en cuestión*.

A diferencia de la pseudociencia, la ciencia auténtica tiene la necesidad de comprobar en la práctica la veracidad de las teorías: si no es posible reproducir en varios laboratorios del mundo los resultados de una idea teórica, la misma ha de ponerse en duda, y ser reformulada. Por eso no es extraño que, poco después de la publicación del modelo BTW, científicos y laboratorios de nivel mundial se olvidaran de sofisticados láseres, máquinas de "sputtering" y aceleradores de partículas, para… ¡"jugar" con arena! La figura 7 muestra, por ejemplo, el experimento diseñado por científicos de los laboratorios de la IBM en 1990: se va agregando lentamente arena al plato de una balanza, de tal modo que las avalanchas que se producen salen por los lados, y se van midiendo por diferencia de pesos. Los autores pasaron mucho trabajo para encontrar un dispositivo que liberara granos uno a uno, y consumieron 24 horas de trabajo continuo sólo para ajustar todo el dispositivo. Las avalanchas medidas por la balanza se iban leyendo directamente en una computadora. Obsérvese que lo que hace a este experimento imposible de realizar en siglos pasados, es el uso de la *computadora*, la cual permite hacer conteos de decenas de miles de avalanchas sin la intervención humana.

Figura 7. Experimento de IBM

En nuestra opinión, *este es un atractivo especial que posee este tipo de experimento para países como el nuestro: aquí puede hacer ciencia de frontera con dispositivos relativamente sencillos, si se usan adecuadamente las computadoras…y mucho más adecuadamente el cerebro*. Aunque el experimento de la IBM indicaba una distribución de avalanchas tipo ley de potencias sin depender siquiera mucho del tipo de granos, la distribución dejaba de comportarse así para pilas de arena de diámetro demasiado grande: la SOC, por lo visto, sólo se cumplía dentro de ciertos límites de tamaño.

Una de las consecuencias más notables de este "juego" científico, es que los cubos se *auto-organizan* de modo que se forma realmente una pila con una pendiente de reposo, aproximadamente igual a lo que esperamos de una pila de arena real. Esta propiedad de *auto-organizarse* para lograr una propiedad macroscópica *emergente* (la pendiente crítica en nuestro caso), es una de las características distintivas de los llamados *sistemas complejos.*

Si ahora graficamos la distribución estadística de tamaños de avalanchas en este sistema, *también obtenemos una ley de potencias*. El hecho de que se obtenga esta ley de potencias –como ocurre en las llamadas transiciones críticas–, más la auto-organización del sistema que hemos descrito, dan el nombre de "criticidad auto-organizada" a la teoría de Bak, Tang y Wiesenfeld. Otra de las enseñanzas interesantes del modelo BTW es que el valor de la pendiente de la distribución (que es muy cercana a –1), se mantiene prácticamente constante aunque cambiemos moderadamente los detalles de las reglas del autómata celular BTW. Se dice entonces que este modelo define una *clase de universalidad.* La *Universalidad* es otra de las características distintivas de los Sistemas Complejos.

El catalizador por excelencia del estudio de los sistemas complejos en nuestro colectivo fue y sigue siendo la difícil situación económica que sufre nuestro país desde la catástrofe del campo socialista, agravada por el bloqueo, que nos obligó a desarrollar al máximo la creatividad.

La escasez de combustible, el problema entonces más grave, se tradujo entre otras cosas en apagones interminables y en... bicicletas.

No nos imaginábamos al principio la implicación de la bicicleta para el estudio "tropical" de los sistemas complejos. Describiremos sólo dos anécdotas de las muchas que tenemos en la colección:

Al tratar de buscar sistemas más eficientes para la combustión, se comenzaron a usar emulsiones agua-combustible en distintos lugares. Nosotros comenzamos a estudiar el problema de la combustión de las gotas de emulsión mediante una simulación del proceso de microexplosión de una gota de combustible inyectando aire dentro de gotas de fuel-oil. *La cámara de aire era una cámara de bicicleta.*

La figura 8 muestra el montaje experimental para estudiar la fragmentación de la gota: como se ve, la gota que cuelga de un capilar es penetrada por otro capilar aún más fino por el cual se inyecta aire para romperla. Los fragmentos se coleccionan en la pared del dispositivo que es de papel acetato. Estos se cuentan luego en el microscopio y se clasifican por tamaño. Se comprobó que para presiones de inyección suficientemente grandes no hay un tamaño característica de gota en una amplia región de tamaños, o sea no se puede definir una "unidad de longitud" para caracterizar la distribución. Esto es una propiedad fractal, como ya señalamos.

La figura 9 muestra los resultados de la medición de los tamaños de las gotas. Uno de los resultados más importantes de este experimento, es que la distribución estadística de radios de gotas sigue una *ley de potencias*. ¿Qué quiere decir esto? Supongamos que realizamos muchas veces un experimento, de modo que tenemos la oportunidad de medir un gran número de gotas. Las gotas pueden ser de diversos tamaños, de modo que podríamos contar cuántas gotas de cada tamaño se han producido en nuestro experimento de rotura. En la figura 9 mostramos una representación gráfica de este conteo como resultado de varios experimentos a diferentes presiones

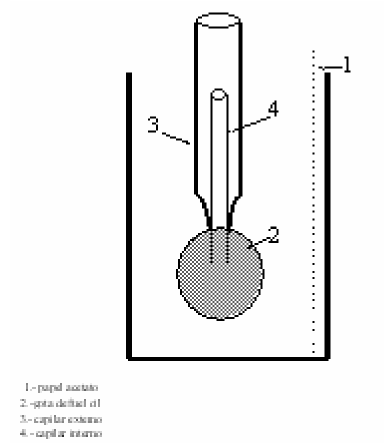

Figura. 8.- Experimento de fragmentación de gotas

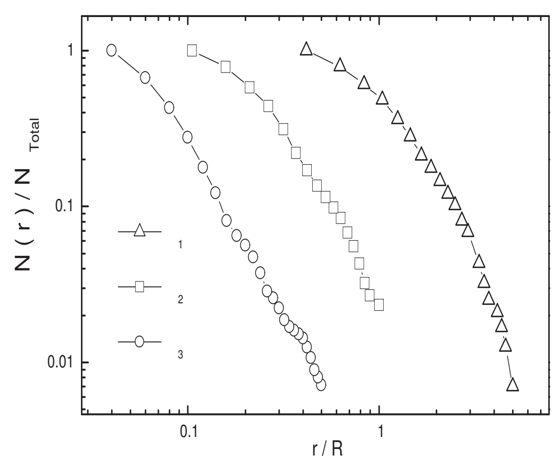

Figura.9.- Resultados del experimento de fragmentación de gotas.

Las distintas curvas, como se dijo, corresponden a distintas presiones de inyección. Se mide la cantidad de gotas acumulativa $N(r)$ es decir el número de gotas con tamaño mayor que r en unidades de la cantidad total de gotas N, en función del tamaño relativo r/R donde R es el radio de la gota que se rompe, para distintas presiones de inyección. Obsérvese que el grafico es logarítmico por ambos ejes y que el comportamiento de las gráficas se puede aproximar a una línea recta. (Esta aproximación es mejor en el caso de mayor presión de inyección, o sea en la curva marcada con círculos).

Una relación lineal entre logaritmos significa una *ley de potencias* entre las magnitudes, en este caso del tipo

$N(r)/N \approx (r/R)^{-\alpha}$ donde α indica la pendiente en el gráfico logarítmico. Una curva así no tiene un máximo local, por lo que no se puede decir que haya un tamaño de gotas más abundante. No existe, pues, un tamaño característico de gotas en este caso. Puede verse que las gotas más pequeñas son más abundantes. Por eso, en el rango que se estudió, la distribución de gotas presenta propiedades fractales.

Las características de los sistemas críticos auto-organizados pueden modelarse con el comportamiento de las avalanchas en las lomas de arena, donde estas avalanchas muestran todas las propiedades que ya hemos mencionado en los fractales y sistemas caóticos.

La tecnología con que se estudian las lomas de arena, si bien es de lo más sencillo a nivel mundial en física, como caracteriza a los experimentos actuales en sistemas complejos, está por encima de nuestras posibilidades. Otros experimentadores han usado lomas de arroz, el cual por razones obvias ha estado fuera de nuestro alcance dada la gran cantidad de arroz necesaria para estos experimentos.

Para no hacer muy larga la historia solo diremos que nuestras lomas terminaron siendo lomas de balines de bicicleta. Los resultados esclarecieron características esenciales de la criticalidad auto organizada, y por su trascendencia fueron publicados en Physical Review Letters. Claro está que estos resultados se mencionan y detallan en clase, y se discute en lo posible resultados de otros investigadores y nuestros propios modelos y puntos de vista.

Como ya dijimos, los pioneros de brindar una "explicación "al fenómeno de distribución según leyes de potencias fueron Bak, Tang y Wiesenfeld[1], si bien en estos momentos la misma dista de satisfacer las inquietudes de muchos investigadores, nosotros incluidos, tiene la virtud de haber aventurado ideas novedosas y, en nuestra opinión, haberle dado a la física actual otro sabor, ayudando a abrir campos teóricos y experimentales de gran motivación. El autómata celular que proponen en la ref. [1] como mecanismo universal para explicar la omnipresencia de las leyes de potencia, ha sido ya superado por otros modelos[2-4], pero continúa manteniendo todo su valor pedagógico y se explica y critica en clases, entre otros.

Los experimentos y fenómenos que exhiben comportamientos con leyes de potencia y que inicialmente fueron incluidos dentro de la llamada "criticalidad auto organizada" preferimos enfocarlos con otros métodos como el empleo de formulaciones no extensivas, lo cual nos sirvió para elaborar modelos de roturas y terremotos que se discuten en clase, manteniendo el curso siempre al mayor nivel de actualidad en la investigación, cosa que los estudiantes aprecian.

Por ejemplo, estos modelos permiten introducir una ley de distribución de la energía de los terremotos que ajusta mucho mejor con las observaciones que la sacrosanta ley de Gutenberg-Richter tan venerada por los sismólogos. La figura 10 muestra la coincidencia en todo el rango de energías para el catálogo de California entre el modelo obtenido por nosotros y la data experimental[5-7].

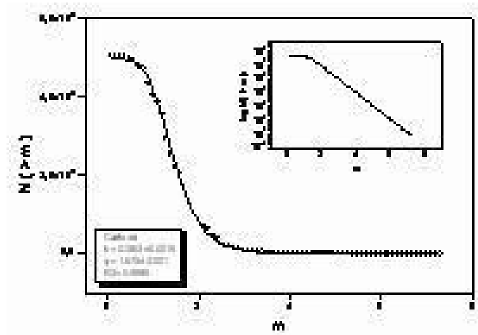

Figura 10.- Resultados del modelo no extensivo para terremotos[7].

6 Conclusiones

Como puede verse, la tarea que nos hemos planteado con este curso es muy difícil y tiene varias facetas. Consiste en extender la *nueva forma de pensar* que implica la física de los sistemas complejos. Esta nueva forma de pensar es tan radicalmente diferente a la tradicional que puede compararse a la diferencia introducida por la física estadística o la mecánica cuántica en la física de su tiempo.

Podemos ilustrar cómo sería la transición de una a otra concepciones de la naturaleza: Un físico no versado en los aspectos de la complejidad vería un sistema mecánico macroscópico como esencialmente determinista en el sentido riguroso: "Tengo las ecuaciones del sistema, las condiciones iniciales y ya conozco el futuro del sistema que estudio".

Este punto de vista se entronizó desde que la mecánica clásica obtuvo sus grandes éxitos en la descripción del movimiento de los cuerpos celestes e hizo patente su poder en el cálculo de mecanismos. En palabras de gran Laplace, se expresa así:

"UNA INTELIGENCIA QUE CONOCIERA TODAS LAS FUERZAS QUE ANIMAN LA NATURALEZA, ASÍ COMO LA SITUACIÓN RESPECTIVA DE LOS SERES QUE LA COMPONEN... PODRÍA ABARCAR EN UNA SOLA FÓRMULA LOS MOVIMIENTOS DE LOS CUERPOS MÁS GRANDES DEL UNIVERSO Y LOS DEL ÁTOMO MÁS LIGERO; NADA LE RESULTARÍA INCIERTO Y TANTO EL FUTURO COMO EL PASADO ESTARÍAN PRESENTES A SUS OJOS" (P.S. Laplace "Los Principios de la Mecánica Celeste")

El físico de que hablamos sólo discreparía de Laplace en cuanto a los objetos cuánticos y los sistemas de muchos cuerpos, pero no en cuanto a la esencia del problema, o sea, en cuanto a la raíz y el significado del determinismo. Esta forma de pensar hay que cambiarla (y es lo que intentamos con este curso) particularmente en cuanto al contenido conceptual del determinismo por una que puede verse reflejada en esta frase:

"...QUIÉN PUEDE CALCULAR EL TRAYECTO DE UNA MOLÉCULA? ¿QUÉ SABEMOS NOSOTROS SI LAS CREACIONES DE LOS MUNDOS NO ESTÁN DETERMINADAS POR LAS CAÍDAS DE GRANOS DE ARENA?...LO PEQUEÑO ES GRANDE, LO GRANDE ES PEQUEÑO, TODO ESTÁ EN EQUILIBRIO EN LA NECESIDAD..." (Víctor Hugo: "Los Miserables").

Seguramente este enfoque deberá tener una incidencia positiva en la enseñanza de la física en el nivel medio. Al efecto, el trabajo de divulgación entendido de esta forma puede servir de base al desarrollo científico- pedagógico en los institutos vocacionales y de los profesores de la enseñanza media.

No esperamos que con un curso como este se formen especialistas en sistemas complejos, pero estamos seguros de que la asimilación de los materiales aquí expuestos, la familiarización con los programas de cómputo y la motivación por la aplicación de los conceptos que en los cursos se exponen a experimentos, investigaciones pedagógicas, y el cambio de enfoque metodológico hacia la física y su enseñanza tendrá consecuencias positivas para nuestra Ciencia.

Bibliografía

1. P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett*, **59** 381 (1987)
2. Sotolongo-Costa, O., Moreno, Y., Lloveras, J., Antoranz, J.C. *Phys. Rev. Lett*. **76**, 1, 42-46 (1996).
3. Vazquez, A., Sotolongo, O., Brouers, F. *J. Phys. Soc. Jpn* **66**, 2324-2327 (1997).
4. Sotolongo-Costa, O., Vazquez, A., Antoranz, J.C. cond-matt/9806176. *Phys. Rev. E* **59**, 6, 6956-6961 (1999).
5. Sotolongo-Costa, O, Arezky H. Rodriguez, Rodgers G. J. cond-matt/002339. *Entropy* **2**, 4, 174-177 www.mdpi.org/entropy (dec/ 2000).
6. Sotolongo-Costa, O , Posadas, A. *Rev. Cub. F is* **19**, 1, pp 15-18, 2002.
7. Sotolongo-Costa, O , Posadas, A. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 048501 (2004).