RCF ISSN:0253-9268; Rev. Cub. de Física, vol .23, No. 2 (2006) p.139-141; Divulgación

Redes complejas: una perspectiva simple

R. Mulet

Cátedra de Sistemas Complejos Henri-Poincaré, Universidad de la Habana; Dpto. de Física Teórica, Facultad de Física Universidad de la Habana, CP 10400 La Habana, Cuba.

Sumario. En este trabajo hacemos una pequeña introducción al tema de las Redes Complejas. Describimos sus principales características, especialmente sus diferencias con las redes aleatorias. Discutimos algunos de los problemas físicos más estudiados en relación a las redes complejas en especial algunos vinculados a las Ciencias de la Computación y presentamos algunas preguntas aún abiertas en el tema. Finalmente, proponemos algunas perspectivas de investigación futura en este tema

Abstract. In this work we make a short introduction to the subject of Complex Networks. We describe its most important characteristics, mainly their differences with random networks. We also discuss some of the most studied physical problems related with these networks, especially those related with the Computer Sciences and we present some open questions. Finally we propose some perspectives for further research.

Introducción

Un grafo puede definirse de manera simple usando dos conjuntos. A uno lo llamaremos el conjunto de los vértices V, y al otro el conjunto de los ejes E a cada par de vértices le haremos corresponder un eje. A la unión de estos conjuntos (V,E) es a lo que llamamos un grafo. Sin embargo, esta definición precisa es demasiado abstracta, y el lector agradecerá seguramente un par de ejemplos ilustrativos. Por ejemplo, podemos llamar vértices a todas las casas de Ciudad de la Habana, y enlaces a los cables eléctricos que las unen, esa estructura es un grafo. También podemos imaginarnos un caso mucho más simple. En una red de pescar, los nudos son los vértices del grafo y las cuerdas de nudo a nudo los enlaces. En un ambiente más científico, podemos imaginarnos el grafo de computadoras que están conectadas a Internet. Las computadoras constituyen los vértices del grafo y las conexiones entre ellas los ejes.

Podríamos seguir enumerando ejemplos, pero preferimos llamar la atención sobre el hecho de que el carácter abstracto de la definición le da al concepto de grafo la posibilidad de ser útil en una amplia gama de problemas. En particular, en este trabajo nosotros vamos a concentrarnos en algunas aplicaciones que han visto la luz en los últimos años.

Comencemos primero llamando la atención sobre el hecho de que desde que sabemos que la materia está conformada por átomos los físicos trabajamos con grafos. Sólo que en general estos grafos tienen una estructura muy simple.

En Ciencia de Materiales suelen tener nombres como estructuras Cúbicas, Monoclínicas, Cúbica centrada en las caras, Ortorrómbicas, etc. Durante muchos años la Cristalografía se ocupó del estudio de este tipo de grafos que en general llamamos redes cristalinas. Quizás la enseñanza más importante que hemos obtenido de estos estudios es que muchas veces basta conocer el tipo de red cristalina que forman un conjunto de átomos para predecir muchas de sus propiedades. Es justamente con esta filosofía con la que enfrentamos hoy el estudio de las llamadas redes complejas.

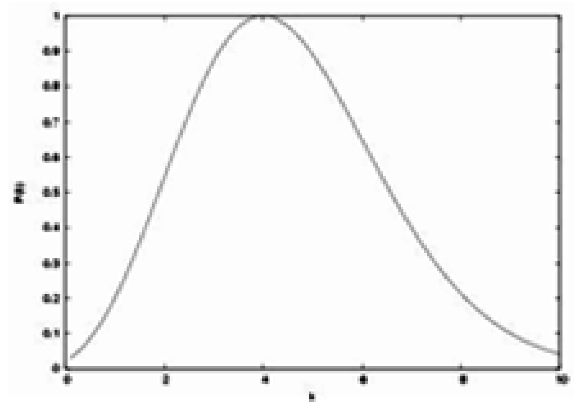

Figura 1. Distribución Poissoniana de Conectividades

Grafos Aleatorios

Antes de ir a estudiar con más detalle las redes complejas, detengámonos en un concepto importante. El grafo aleatorio, o grafo de Erdos-Renyi.[1]

La manera más simple de definirlo es mediante su construcción. Imaginemos primero un conjunto de N vértices. Escojamos uno tras otro cada par de vértices y coloquemos entre ellos un enlace con una probabilidad p. Si N es suficientemente grande, obtendremos un grafo con un número de enlaces pN(N-1)/2.

Estos grafos han sido extensamente estudiados en la literatura y es difícil imaginar una propiedad razonablemente interesante que no este calculada con un nivel de rigor adecuado. Por ejemplo, es bien conocido que la distribución de conectividades de este grafo sigue una distribución de Poisson (figura 1), con media p N. Esto quiere decir que si estudiamos cuál es la probabilidad de que un vértice o nodo tenga una conectividad k, P(k) tendrá un máximo para k=p N. Note la diferencia con las redes cristalinas donde la conectividad es siempre fija, por ejemplo en la red cúbica es siempre 6.

Otra diferencia importante entre estos grafos y las redes cristalinas es la presencia de lazos. En los grafos aleatorios un lazo, o sea, el número de sitios que debo visitar partiendo de un punto dado antes de regresar a él mismo siguiendo sólo los enlaces de la red, es del orden red cuadrada es de orden O(1). Esto, como veremos más adelante tiene implicaciones concretas en toda una serie de fenómenos interesantes.

Conocidas estás propiedades de los grafos, esencialmente matemáticas. La próxima pregunta que debe hacerse un físico es que sucede si uno estudia problemas ¨sobre estos grafos¨. Por ejemplo, un problema muy conocido y no resuelto de la física del magnetismo es el cálculo de la función de partición del hamiltoniano de Ising[4]:

$$H = - J \Sigma_{i,j} S_i S_j$$

en 3 dimensiones. La dificultad a la hora de buscar una solución radica esencialmente en los lazos cortos que posee el sistema en 3 dimensiones. Luego, una primera aproximación para entender este tipo de problemas consiste precisamente en resolverlo en un grafo sin este tipo de lazos (por tanto, un lazo aleatorio) donde la conectividad media sea 6, como en el caso de una red cúbica.

En este caso, el interés de enfrentar este problema en un grafo aleatorio parece derivarse explícitamente de nuestra incapacidad para resolver el modelo anterior en una red cristalina. Sin embargo no siempre es así. Por ejemplo, el estudio del siguiente hamiltoniano de Potes

$$H = J \Sigma_{i,j} \delta(S_i , S_j)$$

en un grafo aleatorio es de sumo interés en la Ciencia de la Computación. Si las variables S pueden tomar q valores que llamamos colores, el estado fundamental del hamiltoniano anterior es aquel que garantiza que sitios conectados posean colores diferentes. El problema que uno se plantea es entonces el siguiente: ¿Es posible con q colores colorear un grafo de conectividad c, de tal suerte que 2 vértices vecinos nunca posean el mismo color[3]?

Estos son solo dos ejemplos que demuestran como la Física y en particular la Física Estadística ha estado constantemente vinculada al estudio de este tipo de sistemas y explica el porque del interés de esta misma comunidad en el estudio de lo que hoy conocemos como redes complejas.

Redes Complejas

La definición de red compleja[2], lamentablemente es mucho menos precisa que la que pudimos dar para grafo aleatorio, y contiene sin duda alguna un factor cultural. En general, la comunidad de investigadores reconoce como un grafo complejo a aquel que posea una distribución de conectividades que asemeje a una ley de potencia (figura 2). Algunos piden que esa potencia sea exactamente 1, otros simplemente piden que la distribución sea lo suficientemente ¨larga¨ para no poder describirla mediante una ley de Poisson.

En este caso, el concepto de complejo es bastante ambiguo y no está asociado a nuestra incapacidad de describir matemáticamente estas redes con las herramientas que conocemos. Al contrario, es más bien discriminatorio. Aquello que no pertenece al mundo de los grafos aleatorios o de las redes cristalinas y regulares es complejo.

Esto por supuesto crea una serie de problemas prácticos a la hora de enfrentar su estudio. Por ejemplo, mientras un grafo aleatorio de conectividad C está bien definido, un grafo complejo de exponente crítico μ no. Grafos complejos, construidos mediante algoritmos diferentes pueden tener la misma distribución de conectividades pero al mismo tiempo diferente tamaño de los lazos. O sea, no son estadísticamente equivalentes.

Esta ambigüedad refleja el hecho de que nos encontramos en un estado inicial de comprensión de estos sistemas y no le resta importancia a su estudio, al contrario. El interés en el estudio de las propiedades de los mismos está muy lejos de ser académico. Mientras que hasta hace poco más de 10 años se pensaba que los grafos que encontrábamos en la naturaleza eran aleatorios, los investigadores hoy están convencidos de que esto no es cierto.

El caso paradigmático es Internet. Si consideramos las páginas web, como los vértices de un grafo y los enlaces virtuales entre ellas como los enlaces del grafo, no es muy difícil de imaginar porque la distribución de conectividades sigue una ley de potencia. Páginas como Yahoo, Google y Hotmail son referenciadas muchas veces a través de la red (alta conectividad), mientras que la inmensa mayoría de las páginas son prácticamente invisibles, no aparecen nunca referenciadas (baja conectividad).

Una vez que aceptamos este hecho estrictamente experimental nos podemos hacer nuevas preguntas, por ejemplo: ¿es esta red más estable que una red aleatoria? La respuesta es Si, si los ataques para destruirla ocurren de manera aleatoria en la red, No, si están dirigidos a nodos altamente conectados.

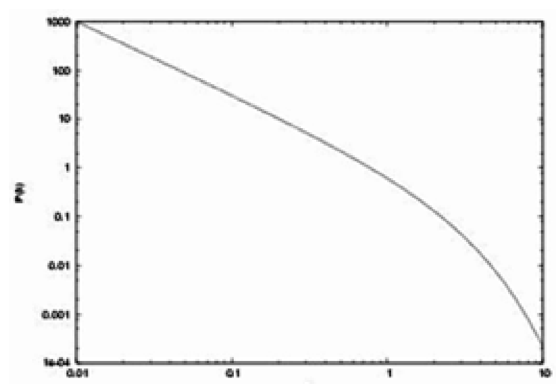

Figura 2. Distribución "ancha" de conectividades. Ley de potencia

Otros ejemplos de redes complejas bien documentadas experimentalmente son: las redes de interacción proteína-proteína, las redes físicas de computadoras, las redes de contactos sexuales en una población, etc. Entonces asalta inmediatamente una duda, si este fenómeno es tan abundante en la naturaleza: ¿existe algún mecanismo general que permita explicar la aparición de las mismas? La respuesta por el momento no es definitiva. Existen varias propuestas para justificar este tipo de mecanismo, pero ninguna es realmente completamente satisfactoria. Probablemente con los años encontraremos que hay varios mecanismos elementales capaces de justificar esta abundancia. Algunos serán válidos para determinados tipos de redes y otros para otras.

Perspectivas

En los últimos años el estudio de lo que aquí llamamos redes complejas ha llamado la atención de una enorme comunidad de investigadores. Más allá de las ambigüedades asociadas a su definición, hay una conjunto grande de propiedades que conocemos y un conjunto grande de fenómenos que sabemos encontraremos en estas redes que no estaban presenten en las redes aleatorias. Por ejemplo, la transmisión de un virus en una red aleatoria ocurre solo si la conectividad media de la misma es suficientemente alta. Cuan alta debe ser esta conectividad, dependerá del mecanismo de transmisión, pero es un hecho que por debajo de cierto valor umbral el virus dejará de transmitirse. Por el contrario, en una red compleja, esto no es necesario, la conectividad media (siempre que esta pueda definirse) puede ser tan baja como se quiera pero la probabilidad de transmisión siempre será mayor que cero. No es difícil imaginarse las implicaciones prácticas de este fenómeno.

Sin embargo, las nuevas líneas de trabajo se mueven en dos direcciones diferentes. Una trata de comprender las propiedades dinámicas asociadas a este tipo de red. Por ejemplo, un conjunto de osciladores inter-actuantes situados en los vértices de una red compleja se acoplara más o menos fácilmente que si estuviera en una red aleatoria. La otra trata de estudiar también las propiedades de la red, pero asumiendo que los ejes son diferentes. Por ejemplo, si los enlaces poseen una propiedad que llamamos resistencia al paso de la corriente: ¿es más o menos eficiente la transmisión de corriente en una red compleja que en una aleatoria? ¿De qué depende esta eficiencia?

No olvidemos, sin embargo que la idea fundamental, detrás de estas preguntas es obtener respuestas generales. Fue así cuando descubrimos que la materia estaba compuesta por átomos y luego cuando estudiamos los grafos aleatorios. Estas redes con distribuciones de conectividades anchas existen, que propiedades de las mismas podemos predecir, sin necesidad de ir a mirarlas una por una, será por muchos años, un tema fascinante y de intensa actividad científica.

Referencias

1. B. Bollobas, Random Graphs, Academic Press: New York (1986)
2. R. Albert and A.L. Barabasi, Reviews of Modern Physics 74, 47 (2002)
3. R. Mulet, A. Pagnani, M. Weigt and R. Zecchina, Phys. Rev. Lett. 89, 268701 (2002)
4. J. P. Sethna, Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexit, Oxford University Press (2006).