Rev. Cub. Física vol.23 No. 2 (2006) p.80-85
ISSN: 0253-9268. Original paper

Revista Cubana de Física
Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana.
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

El problema de los matrimonios estables con información incompleta.

Alejandro Lage y Roberto Mulet[a]

Depto. Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de la Habana, lage@fisica.uh.cu
a) Cátedra de Sistemas Complejos Henri Poincaré, San Lázaro y L, Ciudad de la Habana, Cuba, mulet@fisica.uh.cu

Recibido el 1/06/2006. Aprobado en versión final el 1/12/2006.

Sumario. Se presenta el Problema de los Matrimonios junto a algunos resultados y algoritmos. Se define el problema con información incompleta G(c) y se demuestran algunos teoremas que lo hacen equivalente a un problema con información incompleta G'(c=1). Basados en eso calculamos la probabilidad $P_{es}(c)$ de encontrar al menos un estado estable en el que todos los jugadores estén casados en G(c). Se calcula la conectividad critica c_c que define el rango (c_c …1] de conectividades en las que es posible asignar matrimonios de forma estable a todos los jugadores.

Abstract. After a brief introduction to the Stable Marriage Problem (SMP) and to some known algorithms and results, we define the SMP with incomplete information G(c). We show that it can be turned into an equivalent problem G'(c=1) with complete information. This equivalence will be used to derive an analytic expression for the probability $P_{es}(c)$ of having at least one stable state where every player is married in the incomplete information game G(c). The range of connectivities (c_c …1] defines the games with incomplete information where it is reasonable to look for a stable state where every player is married. An analytic expression is given for c_c.

Palabras clave. Social systems 89.65.–s, Game theory 02.50.Le.

1 Introducción

La segunda mitad del siglo XX vivió el nacimiento y la consolidación de la Teoría de Juegos como modelo de sistemas económicos, sociales y biológicos. Surgida en 1944 a partir de los trabajos de John von Neuman, la teoría de juegos se define hoy como un campo de las matemáticas aplicadas enfocado a la descripción de sistemas de muchos agentes con intereses conflictivos. Su estudio ha merecido varios premios Nobel en Ciencias Económicas, entre ellos el de John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selte en 1994 y más recientemente el otorgado a Thomas Schelling y Robert Aumann en el año 2005. Desde la década de los 80 el campo también se ha vuelto común entre los físicos, especialmente aquellos que se dedican a la modelación de sistemas económicos, sociales o biológicos[1-6], y a aquellos que estudian problemas de optimización[7-9]. En este artículo estudiamos un problema de la Teoría de Juegos conocido como el Problema de los Matrimonios Estables.

Un juego se entiende como un conjunto $\{i \; 1,2\ldots,N\}$ de jugadores o agentes, cada uno de los cuales tiene, a su vez, un conjunto S_i de acciones o estrategias posibles a tomar y una función costo asociada que depende de la estrategia escogida por el jugador en cuestión y de la escogida por los demás jugadores. Un estado del juego corresponde a una adopción de una estrategia por cada jugador. Los agentes se consideran racionales en el sentido de que intentarán en todo momento adoptar la estrategia que minimice su función costo. Como ocurre habitualmente en la vida común, el resultado beneficioso o perjudicial de las acciones de cada jugador no depende sólo de la estrategia escogida por él, sino también de aquellas que adoptaron los demás, sobre las cuales no tiene poder de decisión. Por esto, de forma general los jugadores no tendrán una única estrategia óptima sino que la mejor de sus acciones variará en dependencia de las decisiones tomadas por los demás jugadores. Un ejemplo clásico es la bolsa de valores[1,2] donde hay que decidir entre vender o comprar acciones, y lo más conveniente será hacer aquello que menos jugadores hacen.

2 Equilibrio de Nash

El concepto clave de esta teoría es el de Equilibrio de Nash y se debe a John Nash[12]. Si un estado $\Pi^* = \{s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_N\}$, donde el jugador i-ésimo esta jugando la estrategia $s^*_i \in S_i$, es tal que todo agente está jugando la mejor de sus respuestas a las decisiones de los demás, entonces Π^* es un *Equilibrio de Nash*. Tales estados perduran en el tiempo pues ningún jugador se ve tentado a desviarse de su comportamiento, dado que s^*_i es la estrategia que minimiza su función costo

$$\forall i \quad \forall s \in S_i \quad \begin{matrix} U_i(s^*_1, s^*_2, \ldots s^*_i, \ldots, s^*_N) \leq \\ U_i(s^*_1, s^*_2, \ldots s, \ldots, s^*_{N-1}, s^*_N) \end{matrix} \qquad (1)$$

tomando fijas las estrategias de los demás. La definición vino acompañada de la demostración del *Teorema de Nash*[12] que asegura la existencia de dichos estados (pueden ser más de uno) en cualquier juego si se incluye una definición un poco más amplia de estrategia que la dada hasta aquí.

Es importante señalar que la estabilidad definida según Nash es un concepto estático y no implica que la dinámica de los juegos conduzca a estados estables en el sentido de Nash.

3 Problema de los Matrimonios Estables

Este problema aborda desde el punto de vista de la teoría de juegos la situación en la que dos conjuntos X e Y de igual tamaño tienen que ser dispuestos en parejas (x,y) tomando en consideración las opiniones de cada elemento respecto a los del otro grupo. En su planteamiento más didáctico los conjuntos se asocian a hombres y mujeres, y las parejas se llaman matrimonios, de lo cual le viene el nombre al problema.

Una instancia de nuestro problema viene dada por:

1. Un conjunto de N hombres y de N mujeres.
2. Para cada jugador (hombre o mujer) existe una lista ordenada de los elementos del otro sexo que refleja sus preferencias (ver Tabla I).

Las decisiones de ambos sexos consisten en la elección de una pareja. El costo $x_{i,j} = U_i(M_j)$ que tiene para el hombre i-ésimo estar casado con la mujer j-ésima es el lugar que ocupa dicha mujer en su lista de preferencias, y análogamente se define el costo $y_{j,i}$ para la mujer j-ésima.

En todo el tratamiento que sigue las listas de preferencia se consideran ordenadas aleatoriamente, de forma que no hay correlación entre la valoración de distintitos jugadores. De ser posible, cada jugador se casaría con la primera persona en su lista, pero la aleatoriedad hará que rara vez un hombre y una mujer se tengan ambos como los primeros en sus listas. Esta frustración es una característica típica de los sistemas desordenados[8,9].

Un estado del problema es una asignación de parejas $\Pi = \{(H_1, M_{\Pi_1}), (H_2, M_{\Pi_2}) \ldots (H_N, M_{\Pi_N})\}$ en la que todos los elementos están casados con un y sólo un elemento del sexo opuesto. En la Tabla I se muestra una instancia del problema de los matrimonios para N=4.

Tabla I
Matrices de Preferencias para los hombres y las mujeres. N=4

Hombres				
Preferencia	1	2	3	4
H_1	M_2	M_1	M_3	M_4
H_2	M_4	M_3	M_1	M_2
H_3	M_4	M_1	M_2	M_3
H_4	M_3	M_2	M_1	M_4
Mujeres				
Preferencia	1	2	3	4
M_1	H_2	H_4	H_1	H_3
M_2	H_3	H_1	H_2	H_4
M_3	H_2	H_4	H_3	H_1
M_4	H_2	H_3	H_1	H_4

Los físicos suelen identificar la función costo de la teoría de juegos con una "energía" de forma que los intentos de minimizar el costo de los jugadores sean congruentes con la minimización de la energía. . En el estado $\Pi =$ {(H_1,M_2), (H_2,M_3), (H_3,M_4), (H_4,M_1)}, por ejemplo, el hombre H1 se encuentra en su mejor situación con una energía $x_{1,\Pi_1} = x_{1,2} = 1$ pues la mujer M_2 es la primera de su lista de preferencias, mientras que M_2 se encuentra con una energía $y_{\Pi_1,i} = y_{2,1} = 2$ pues H_1 es el segundo de su lista. La energía media de los hombres y las mujeres se define como $X_\Pi = \frac{1}{N}\sum x_{i,\Pi_i}$ y $Y_\Pi = \frac{1}{N}\sum y_{\Pi_i,i}$

respectivamente y la energía total de un estado como $E_{\Pi} = X_{\Pi} + Y_{\Pi}$.

4 Matrimonios Estables y Equilibrio de Nash

Dado un estado cualquiera Π la pareja del hombre H_i y la mujer M_j se llamará Inestable si:

1. El hombre H_i y la mujer M_j **no son** un matrimonio en el estado actual.
2. Tanto el hombre H_i como la mujer M_j preferirían formar pareja el uno con el otro que con sus actuales cónyuges.

En el estado antes ilustrado, la pareja (H_2,M_4) es una Pareja Inestable, pues H_2 prefiere a M_4 antes que a su esposa M_3, y M_4 prefiere a H_2 antes que a su esposo H_3. En la vida real esto sería suficiente para que ocurra el divorcio en los matrimonios a los que pertenecen H_2 y M_4 y estos formen un nuevo matrimonio ganando ambos en felicidad. Como bien se ilustra las Parejas Inestables conducen a la reconfiguración de los estados si se considera a los jugadores actuando racionalmente. Un Equilibrio de Nash será, por tanto, un estado que no contenga ninguna Pareja Inestable, pues ningún jugador encontrará algo mejor que hacer que quedarse con su actual pareja. En otras palabras, un tal estado será estable respecto a las acciones individuales de los jugadores, de aquí que también se le llame Matrimonio Estable a un estado de Equilibrio de Nash. El problema de los matrimonios estudia la existencia y propiedades de los estados de equilibrio de Nash.

5 Algoritmo Gale Shapley

Dada una instancia del problema como la antes descrita el conjunto de los estados posibles tiene N! elementos, de los cuales, por necesidad, alguno Π^0 es el de menor energía total $E^0 = E_{\Pi^0}$. Este estado es el que la termodinámica predice como el de equilibrio a temperatura T=0. Las simulaciones demuestran que de forma general Π^0, que coincide con el óptimo social (el estado en que las personas son más felices como promedio), no es estable según Nash. Esta situación se repite mucho en teoría de juegos y tiene la primera lectura de que los óptimos sociales son inestables respecto al accionar egoísta de los jugadores[6,10]. Usando métodos de la física de sistemas desordenados Mezard y Paris[8] han probado que $\overline{E}^0 = 1.617\sqrt{N}$, mientras que por métodos probabilísticas[10] se ha probado que el estado estable en que la gente es más feliz como promedio tiene una energía $\overline{E} = 2\sqrt{N}$. En ambos casos la barra indica la promediación de la magnitud sobre el desorden congelado, en este caso sobre el conjunto de listas de preferencia.

Por otra parte dada cualquier instancia de este problema, siempre existe al menos un equilibrio de Nash, y por lo general existen muchos[10,11]. Las propiedades estadísticas de estos estados y su dependencia con N han sido ampliamente estudiadas[6,10,11]. En torno a este campo hubo también mucho trabajo de científicos de la computación[13,14] en el diseño de algoritmos que permitieran hallar de forma eficiente todos los estados estables en una instancia. De particular interés es el algoritmo de Gale y Shapley[13], en el que se demuestra que hay una forma muy sencilla de encontrar un estado estable. La misma se basa en dividir los sexos por roles: los hombres proponen matrimonio, las mujeres esperan en casa. Todos los hombres, mientras estén solteros propondrán matrimonio a las mujeres por orden de preferencia en sus listas. Las mujeres esperarán a recibir proposiciones y aceptarán siempre que estén solas, o que su actual cónyuge sea menos gustado que el nuevo pretendiente. En este último caso, las mujeres dejan a un hombre por otro y el abandonado continúa proponiendo a las mujeres de su lista. El algoritmo termina cuando el último hombre soltero se casa.

El resultado del algoritmo no depende del orden en que se implemente, y siempre conduce a un mismo estado estable según Nash. En el ejemplo de la Tabla I, en el primer paso H_1 propondría a M_2 y sería aceptado, H_2 propondría a M_4 y también sería aceptado, H_3 propondría a M_4 que lo rechazaría pues prefiere a H_2, y H_4 propondría a M_3 que lo aceptaría. En el segundo paso sólo queda H3 soltero quien pasa a proponer matrimonio a la segunda mujer de su lista, M1, quien lo acepta y termina el algoritmo dando como resultado el estado $\Pi^{GS} = (H_1, M_2), (H_2, M_4), (H_3, M_1), (H_4, M_3)$ en el cual se puede comprobar que no hay ninguna pareja inestable.

Se puede probar que en ningún otro estado estable ningún hombre se encuentra casado con una mujer más gustada que la que le corresponde en Π^{GS}. Es decir, Π^{GS} es el estado óptimo para los hombres, mientras que, también se prueba, es el pésimo para las mujeres. En valor medio la energía de los hombres y las mujeres vienen dadas por[8]:

$$\overline{X}^{GS} = \log N \qquad \overline{Y}^{GS} = \frac{N}{\log N} \qquad (2)$$

Esto demuestra que la actitud activa ante la toma de decisiones es mucho más ventajosa que la pasiva. Por supuesto, uno puede invertir el rol de los sexos en el algoritmo de Gale Shapley y obtener el estado óptimo para las mujeres que es el pésimo para los hombres. Si estos dos estados coinciden, entonces la instancia en cuestión tendrá solo un estado estable. Si no coinciden pueden existir muchos más estados intermedios entre uno y otro.

6 Información incompleta

Entre las muchas generalizaciones que ha tenido el problema de los matrimonios, una posible es la restricción de la información en el siguiente sentido: las listas de preferencias pueden estar incompletas, de forma que hay ciertas posibles parejas (que pudieran ser las mejores) de las cuales no se tiene criterio porque se les desconoce. La motivación es clara: muy a nuestro pesar, sólo conocemos una pequeña fracción de las mujeres (hombres) de nuestra edad. Desde el punto de vista económico el problema de los matrimonios se usa como modelo del mercado laboral, y la información incompleta refleja el hecho de que la adquisición de información cuesta tiempo y recursos, por lo cual tanto los empleados como los empleadores conocen sólo una fracción de sus opciones posibles.

Una primera pregunta a hacerse es cómo depende la felicidad media de la cantidad de información que se tiene[4]. Si bien la ausencia de información puede hacer que desconozcamos a cierta pareja con la cual estaríamos muy a gusto, tiene en cambio la ventaja de reducir la competencia, pues ahora la cantidad de personas que conoce a la mujer más gustada en nuestra lista es menor. Las simulaciones y los resultados analíticos demuestran que siempre es preferible la abundancia de información, aunque venga acompañada de más competencia[4]. Otra pregunta interesante es la dependencia del número de estados estables en función de la información disponible por los jugadores[11] o si es posible o no tener al menos una configuración de equilibrio de Nash. Esta última cuestión es la que abordamos aquí.

Llamaremos conectividad, c, a la fracción de elementos del sexo opuesto que cada jugador conoce. El caso c=1 corresponde al de información completa, mientras que c=0 es el caso en que hay un desconocimiento total de los elementos de sexo opuesto, y por tanto no existen estados de ningún tipo. Para un valor fijado de c, los elementos desconocidos se escogen al azar con probabilidad 1-c a partir de la lista completa. Una instancia del problema con información c=0.5 es la siguiente:

Aquí se han removido la mitad de los elementos (aparecen tachados) a partir de las matrices de preferencias del ejemplo anterior (Tabla I). En este caso parejas como (H_1,M_2) no son posibles porque sus elementos no se conocen. Diremos que una pareja (H,M) es inestable si:

1. H y M se conocen.
2. Tanto H como M se prefieren mutuamente a sus actuales cónyuges.

El equilibrio de Nash con información limitada seguirá siendo el estado en el que no existen Parejas Inestables. Queremos determinar la probabilidad $P_{es}(c)$ de que se pueda asignar parejas a los jugadores de forma que se obtenga un estado estable en el que todo el mundo se encuentra casado.

Para calcular $P_{es}(c)$ demostramos una equivalencia entre el problema con información incompleta y un problema con información completa. Usando resultados previos del problema con información completa, obtenemos una expresión para $P_{es}(c)$.

Llamemos G(c) una instancia del problema con información incompleta (ver Tabla II). Definamos G' la instancia que se obtiene cuando se reordena una de las matrices de preferencias (la de los hombres, por ejemplo) de forma que todos los elementos desconocidos se ponen después de los conocidos en G(c), y estos mantienen su orden relativo como se muestra en la Tabla III.

Tabla II

Instancia del problema G(c=0.5). Los elementos desconocidos aparecen tachados.

Hombres				
Preferencia	1	2	3	4
H_1	~~M_2~~	**M_1**	~~M_3~~	**M_4**
H_2	~~M_4~~	~~M_3~~	**M_1**	**M_2**
H_3	**M_4**	~~M_1~~	~~M_2~~	**M_3**
H_4	**M_3**	**M_2**	~~M_1~~	~~M_4~~
Mujeres				
Preferencia	1	2	3	4
M_1	**H_2**	~~H_4~~	**H_1**	~~H_3~~
M_2	~~H_3~~	~~H_1~~	**H_2**	**H_4**
M_3	~~H_2~~	**H_4**	**H_3**	~~H_1~~
M_4	~~H_2~~	**H_3**	**H_1**	~~H_4~~

A cada estado Π del problema G(c) le corresponde el mismo estado Π en el problema G' en el que ahora todos los hombres están casados con una de sus primeras cN mujeres, pues entre cN+1 y N están ubicadas las mujeres desconocidas en el problema G(c), que no pueden por tanto pertenecer a ningún estado. En cambio si Π es un estado cualquiera en G', solo será un estado en G(c) si cumple la condición $\forall_i \quad x_i' \leq cN$. En ese caso diremos que $\Pi \in G(c)$.

Tabla III

Instancia G' derivada de la instancia de la Tabla II con conectividad c=0.5. La matriz de los hombres se ha reordenado y se considera nuevamente el caso con información completa.

Hombres				
Preferencia	1	2	3	4
H_1	**M_1**	**M_4**	M_2	M_3
H_2	**M_1**	**M_2**	M_4	M_3
H_3	**M_4**	**M_3**	M_1	M_2
H_4	**M_3**	**M_2**	M_1	M_4
Mujeres				
Preferencia	1	2	3	4
M_1	**H_2**	H_4	**H_1**	H_3
M_2	H_3	H_1	**H_2**	**H_4**
M_3	H_2	**H_4**	**H_3**	H_1
M_4	H_2	**H_3**	**H_1**	H_4

Probemos el siguiente teorema:

T0: Si $\Pi \in G(c)$, entonces una pareja (H,M) es inestable en G(c) si y solo si es inestable en G'.

Demostración: Notemos primero que a los efectos de la inestabilidad de una pareja solo importa si H y M se gustan más mutuamente que lo que gustan de sus actuales cónyuges, es decir, solo importa la posición relativa en la lista de preferencias. Hay dos casos a analizar. Si los jugadores H y M se conocen en G(c), entonces las posiciones relativas de los elementos conocidos no cambió al pasar de G(c) a G' y por tanto tampoco cambia el análisis de la conveniencia de formar un nuevo matrimonio (H,M). Si los elementos H y M no se conocen, entonces nunca serán una pareja inestable en G(c) (ver definición), y tampoco lo serán en G' pues H está casado en el estado actual con una mujer que conoce, y por tanto ocupa una de las cN primeras posiciones en sus listas, mientras que M está después de la posición cN por lo cual nunca H la preferirá a su actual pareja. LQQD.

Usando el anterior teorema se pueden demostrar de forma sencilla los siguientes:

T1: Si un estado es estable en G(c), lo es en G'.

T2: Si un estado Π estable en G' pertenece a G(c), entonces también es un estado estable en G(c).

T3: Si el resultado Π^{GS} del algoritmo Gale Shapley en G' pertenece a G(c), entonces también es el resultado del algoritmo Gale Shapley en G(c).

T4: Si $\Pi^{GS} \notin G(c)$ entonces no hay ningún estado estable en G(c) donde todos los jugadores estén casados.

El último teorema se demuestra por reducción al absurdo a partir de T1. Supongamos que existe un estado estable Π en G(c). Como $\Pi^{GS} \notin G(c)$, al menos un hombre en el estado Π^{GS} terminó casado con una mujer que ocupa una posición entre cN+1 y N en su lista en G'. En el estado Π, que en virtud de T1 también es estable en G', este hombre se encuentra con una mujer más gustada, lo cual contradice que Π^{GS} sea el óptimo para los hombres en G'. LQQD.

Otra forma de escribir T4 nos será útil a la hora de calcular la probabilidad de que existan estados estables con información limitada:

T4 (Corolario): El problema G(c) tiene al menos un estado estable si y solo si el resultado del algoritmo Gale Shapley en G' pertenece a G(c).

Hemos hecho una equivalencia entre la existencia de estados estables en el problema con información incompleta y cierta propiedad del estado óptimo para los hombres en el problema con información completa derivado. Este resultado no fuera muy útil para calcular $P_{es}(c)$ de no ser por el siguiente:

T5: Las propiedades estadísticas del problema derivado G' son las mismas que la del problema de los matrimonios con información completa y listas de preferencias aleatorias.

Esto se debe a que el reordenamiento hecho en las listas de preferencias no implica ninguna correlación entre las listas. De esta forma todas las expresiones obtenidas para el problema de los matrimonios son validas para los problemas derivados. En la ref. [10] se demuestra que la probabilidad de encontrar un hombre con energía q en un estado estable donde las mujeres tienen una energía media de r, es:

$$P_H(q) = \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{q-1} \frac{r}{N} \tag{3}$$

Además, como citamos antes, es un resultado conocido que en el estado Π^{GS} las mujeres tienen como promedio una energía $r = \overline{Y}^{GS} = \dfrac{N}{\log N}$. Vamos a calcular la probabilidad de que un hombre quede casado con una mujer que esta más allá de la posición cN en su lista de preferencias como:

$$F(c) = \sum_{q=cN+1}^{N} P_H(q) = -\left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N} + \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{cN} \tag{4}$$

En virtud de T4 el problema G(c) tendrá al menos un estado estable si todos los hombres quedan casados con una de sus primeras cN opciones en el estado Π^{GS} de G'. Esto tendrá una probabilidad:

$$\begin{aligned} P_{es}(c) &= \left(1 - F(c)\right)^N \\ &= \left(1 + \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N} - \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{cN}\right)^N \\ &\cong \left(1 + e^{-r} - e^{-cr}\right)^N \end{aligned} \tag{5}$$

Esta es la relación que estábamos buscando y aparece graficada en Figura 1 junto con el resultado numérico de las simulaciones hechas para sistemas de distintos tamaños.

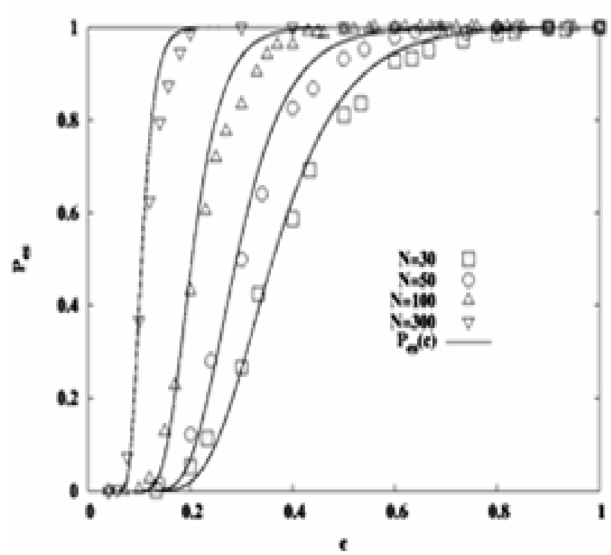

Figura 1. Se muestra el resultado analítico obtenido en la ecuación (5) junto con los resultados numéricos promediados sobre 103 instancias del problema de los matrimonios

El ajuste es bastante bueno, especialmente en lo que refiere al cambio de comportamiento entre los sistemas con estados estables y aquellos que no lo tienen. Una forma de estimar la conectividad crítica c_c que define el cambio de comportamiento de los sistemas es a través de la relación $P(c_c) = 0.5$. Haciendo algunas aproximaciones validas para valores grandes de N obtenemos:

$$\begin{aligned} 0.5 &= P(c_c) \\ &\cong (1-e^{-cr})^N \cong e^{-Ne^{-cr}} \qquad (6) \\ c_c &= \frac{\log^2 N}{N} \end{aligned}$$

Un resultado semejante obtuvieron Dzierzawa y Omero[11] considerando en vez de información incompleta el caso en que tanto hombres como mujeres tienen una aceptación umbral para sus parejas. Esto quiere decir que aunque se tenga opinión de todas las posibles parejas, es preferible quedar soltero a compartir una relación con una persona que está más allá de la posición ΔN en nuestra lista, donde Δ es el umbral de aceptación y juega el papel de la conectividad. El resultado de Dzierzawa y Omero es que si los hombres y mujeres ajustan su umbral al valor crítico, no importa qué sexo tome la iniciativa, se llega a un estado estable que es simétrico en energía para hombres y mujeres. El hecho de que este estado se obtenga justo para el valor crítico de la conectividad tiene también la implicación de que se hace menos probable encontrar un estado estable en el que todos tengan pareja.

Conclusiones

En el estudio del problema de los matrimonios con información incompleta hemos demostrado la equivalencia entre este problema y uno derivado con información completa. Los teoremas presentados, y en especial el **T1**, **T2** y **T5** pueden ser de utilidad en trabajos posteriores sobre este modelo.

Basados en **T4** y **T5** y usando resultados conocidos del problema de los matrimonios con información completa, obtuvimos una expresión para la probabilidad $P_{es}(c)$ de que existan estados estables en que todos los elementos estén casados. La forma de la función $P_{es}(c)$ y el valor de c_c obtenido permiten clasificar a las instancias G(c) del problema de los matrimonios con información limitada en dos grupos según $c < c_c$ ó $c > c_c$. En el primero de los casos, es imposible lograr una asignación estable de parejas a todos los jugadores.

Tomando literalmente el problema de los matrimonios como modelo de las relaciones de pareja en la sociedad, y olvidando por un momento las sobresimplificaciones del modelo, en una población de 12 Millones de personas, donde 6M son de un sexo y 6M del otro, y alrededor de 1/6 de cada sexo (1M) tienen una edad que no dista más de 5 años de la nuestra, habría que conocer un promedio de $c_c N = \log^2 N = \log^2 1M = 190$ personas del sexo opuesto o más para garantizar una asignación estable de parejas a cada persona.

Referencias

1. Y.C. Zhang, Modeling Market Mechanism with Evolutionary Games, Europhys. News 29, 51 (1998).
2. D. Challet and Y.-C. Zhang, Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game, Physica A 246 :407-418 (1997).
3. Barbara Drossel, Biological Evolution and Statistical Physics, Advances in Physics, 50 (2001).
4. Yi-Cheng Zhang, Happier World with More Information, Physica A 299 (1-2) pp. 104-120, (2001).
5. Paolo Laureti and Yi-Cheng Zhang, Matching games with partial information, Physica A, Volume 324, Issue 1-2, p. 49-65 (2003).
6. Alejandro Lage-Castellanos and Roberto Mulet, Physica A, 364: 389-402 (2006).
7. Stephan Mertens, Random Stable Matchings, J. Stat. Mech. P10008 (2005).
8. M. Mezard and G. Parisi, J. Physique Lett. 46, L-771 (1985)
9. Th. M. Nieuwenhizen, The marriage problem and the fate of bachelors, Physica A 252: 178-198 (1998).
10. M.-J. Omero, M. Dzierzawa, M. Marsili and Y.-C. Zhang, J Physique I France 7: 1723-1732 (1997).
11. M. Dzierzawa and M.J. Omero, Physica A, 287: 321-33 (2000).
12. Robert Gibbons, *A primer in game theory*, (Ed. By Harvester Wheatsheaf, London,1992).
13. D. Gale and L. S. Shapley, Am. Math. Monthly 69, 9 (1962).
14. D. Gusfield and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, The MIT Press (Cambridge, Massachusetts; London, UK; 1989).