



## La física y sus modelos; las simulaciones como herramienta didáctica

P. A. Lonngi Villanueva, M. D. Ayala Velázquez

En licencia sabática del Departamento de Física, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, San Rafael Atlixco 168, Col. Vicentina, 09340 Iztapalapa, México D. F.. [plov@xanum.uam.mx](mailto:plov@xanum.uam.mx)† y [dav@xanum.uam.mx](mailto:dav@xanum.uam.mx)  
†autor para la correspondencia

Recibido el 1/06/2007. Aprobado en versión final el 15/6/2007.

**Sumario.** Mostramos algunos ejemplos de modelos y simulaciones y sus objetivos didácticos específicos para que el alumno adquiera, comprenda y afiance conceptos como: 1) amplitud y frecuencia de un oscilador forzado y resonancia; 2) conducción a lo largo de una barra, leyes de Newton y de Fourier y calorimetría; 3) red unidimensional de circuitos RC y sus tensiones; 4) disipación cuadrática y viscosa y sus coeficientes de resistencia y 5) rapidez de avance del frente de mojado en el papel y el efecto de posibles errores sistemáticos y compare la simulación con sus resultados experimentales.

**Abstract.** We offer a few examples of models and their simulation and particular didactic objectives, aiming to help the student to acquire, understand and strengthen concepts such as: 1) amplitude and frequency of a forced oscillator and resonance; 2) conduction along a bar, Newton's and Fourier's laws and calorimetry; 3) a one-dimensional network of RC circuits and its tensions; 4) quadratic and viscous dissipation and their resistance coefficients, and 5) rate of advance of the wet front in paper and the effect of possible systematic errors, whenever possible making a comparison with his/her experimental results.

**Palabras clave.** Investigación en enseñanza de la física, 01.40.Fk, uso de computadoras en la enseñanza, 01.50.H-, modelación y simulación en computadora, 07.05.Tp.

### 1 Introducción

La confusión de varios de los términos de importantes conceptos físicos, sus ideas previas y las escasas capacidad de observación y habilidades para realizar y analizar experimentos, aunadas a la riqueza y complejidad del mundo físico, le dificultan al alumno comprender la física, en sus relaciones y conceptos correctos, estimar el efecto de las variables de interés y adoptar modelos físicos consistentes y explicaciones adecuadas de los fenómenos. Como los modelos y las simulaciones nos permiten acercarnos a la realidad y cuantificar el efecto de las variables relevantes de cada problema, es muy útil incorporar su uso sistemático en la enseñanza.

El uso de simulaciones no requiere conocimientos

completos y profundos de los métodos para resolver las ecuaciones algebraicas o diferenciales, ni del tema asociado con la simulación, por parte de los alumnos. En cambio, es indispensable que el profesor conozca a fondo la física de cada problema, los métodos de solución (analíticos y numéricos) y también las dificultades para su ejecución experimental, habiendo identificado con anticipación el proceso o estrategia didáctica deseable y las necesidades y dificultades de sus alumnos, para seleccionar y utilizar las simulaciones pertinentes y adecuadas en cada etapa del proceso educativo, para acompañarlos y facilitarles la adquisición del conocimiento.

En el primer año de la universidad (o en niveles inferiores), las simulaciones no son para que el alumno las use por su cuenta y riesgo, sino para que el profesor las aproveche para mostrarle fenómenos, conceptos, varia-

bles y relaciones asociados con la realidad y el modelo que la describe, manteniéndose el profesor atento a las necesidades particulares de cada alumno, permitiéndole usarlas durante todo el tiempo que requiera para explorar su aplicación e identificar las relaciones entre las variables.

Aquí mostramos algunos ejemplos de modelos y simulaciones en algunos campos de la física y los objetivos didácticos específicos que pueden alcanzarse realizando actividades dirigidas y planeadas para ellos, abarcando también su uso en el laboratorio.

Entre los temas que presentan mayor dificultad para su comprensión, análisis, o que simplemente usan la simulación con un objetivo específico, hemos elegido:

1. El mojado de una tira de papel, que aunque es muy fácil de observar<sup>1</sup>, no se le estudia ni se evidencia su fundamental importancia en aplicaciones, como la absorción eficaz de los líquidos corporales por toallas, pañales y pañuelos desechables<sup>2</sup>.

2. El oscilador forzado y la resonancia, que es esencial para la prevención de accidentes y fracturas en las construcciones por cargas y movimientos telúricos y que requieren la correcta comprensión de la amplitud y frecuencia angular de las oscilaciones.

3. La conducción de calor a lo largo de una barra y los procesos de convección en sus extremos como un proceso dinámico en el que intervienen los gradientes de temperatura, los flujos de potencia calorífica y las relaciones entre ellos.

4. Una red unidimensional periódica de circuitos RC es un modelo simple, con elementos concentrados, de una línea de transmisión y su simulación obtiene las tensiones en sus nodos y las corrientes en los elementos resistivos, cantidades fácilmente observables.

5. Mediante las simulaciones se supera la extrema simplificación habitual de desprestigiar la resistencia del medio en una caída, considerando la relación entre la velocidad terminal y los coeficientes de resistencia, suponiendo que ésta sea de tipo viscoso, proporcional a la velocidad, o bien proporcional al cuadrado de la velocidad. Se previenen así algunas de las dificultades que suelen presentarse para determinar experimentalmente el coeficiente de viscosidad del medio.

La herramienta computacional que utilizamos es Modellus versión 2.5, de V. Duarte Teodoro, J. P. Duque Vieira y F. Costa Clerigo, disponible en el sitio <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>, libre de cargo para su uso en las instituciones educativas.

## 2 Breve descripción de Modellus

El programa Modellus facilita al profesor hacer simulaciones de modelos como los elegidos ya que las ecuaciones se escriben esencialmente de la misma manera que las ecuaciones matemáticas del problema, dispone de ventanas gráficas para las cantidades deseadas en abscisa y ordenada, cuenta con la posibilidad de incorporar texto, vectores, medidores de nivel, etc., en una ventana de

animación gráfica, en la que incluso permite usar herramientas de medición para reproducir con el modelo, resultados experimentales capturados en forma de archivos de imagen y contiene un eficiente integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias, que facilita encontrar soluciones numéricas a los problemas.

## 3 Modelos y simulaciones

A continuación se describe cada modelo y se presentan las ecuaciones asociadas, resaltando, sin pretensión de ser exhaustivos, algunos de los posibles objetivos didácticos específicos.

**3.1 Mojado de una tira de papel.** Para examinar cómo avanza el frente mojado sobre la tira de papel y determinar el tipo de relación funcional, se coloca sobre una regla, placa de vidrio o plástico en posición horizontal (para evitar el efecto de la gravedad) una tira de papel marcada con líneas (de preferencia con tinta soluble) equidistantes 1 cm, dejando un extremo que cuelga y esté dentro del agua. Se observa cómo el agua se absorbe y avanza sobre la tira de papel y se registra el tiempo en el que el frente mojado llega a cada línea.

El modelo simplificado se conoce con el nombre de Ley de Lucas-Washburn y esencialmente plantea que si  $F_m$  es la fuerza de bañado y  $b$  el coeficiente de resistencia, ambos constantes, la ecuación que describe el mojado es:

$$x \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{F_m}{b} = \frac{A}{2} \quad (1)$$

donde  $A$  es una constante que depende de  $d$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$ , que son el diámetro de los poros del papel, la densidad, tensión superficial y viscosidad del agua absorbida, respectivamente, dependencia que puede obtenerse mediante análisis dimensional.

Además de facilitar al alumno la visualización y comprensión del fenómeno, el análisis gráfico del avance del frente mojado simulado sin errores sistemáticos y con ellos nos permite mostrar explícitamente en las gráficas el efecto de su presencia y discutir la forma de controlarlos, para realizar un análisis bien fundamentado y poder obtener conclusiones confiables o decidir si es necesario repetir con mayor cuidado las mediciones.

**3.2 Oscilador forzado y resonancia.** El sistema considerado consiste de un resorte de constante  $k$  y un amortiguador viscoso con coeficiente de resistencia  $r$ , unidos a una masa  $m$ , a la cual se aplica una fuerza oscilatoria de magnitud  $F_0$  y frecuencia  $\omega$  conocidas. Se busca que el alumno comprenda y aplique correctamente los conceptos de amplitud, periodo, frecuencia angular de oscilación y natural del oscilador durante la ejecución de la simulación, para construir y analizar la curva de resonancia. Además de esta comprensión y uso de variables, desarrolla la capacidad de identificar gráficamente si ha transcurrido suficiente tiempo para que las condiciones iniciales ya no tengan relevancia en la oscilación y que el oscilador esté en el régimen permanente.

La simulación permite obtener la amplitud de oscilación a diferentes frecuencias de la fuerza externa, como en un experimento real. Estos datos se introducen en una hoja de cálculo para obtener la correspondiente gráfica de la curva de resonancia y calcular el valor de las variables que requiere el análisis gráfico.

La deducción del modelo se realiza por ejemplo, en Thomson<sup>3</sup>, y la amplitud de oscilación está dada por:

$$X = \frac{\frac{F_o}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{r}{k} \omega\right)^2}} \quad (2)$$

El análisis gráfico se simplifica definiendo el desplazamiento estático como  $X_o = F_o / k$  y al identificar la nueva ordenada con  $(X_o / X)^2$  y la nueva abscisa con la suma de cuadrados del subradical, se predice que debe obtenerse una recta, por lo que hay que calcular los valores de estas variables basados en los datos y construir la gráfica correspondiente.

**3.3 Conducción de calor en una barra.** Este problema es muy importante en cursos de ecuaciones diferenciales parciales, véase por ejemplo [4] o [5], y la simulación introduce conceptos básicos de la calorimetría y la termodinámica; muestra gráficamente el equilibrio y cómo se alcanza y busca desarrollar la capacidad de hacer predicciones frente a situaciones teóricas y experimentales nuevas.

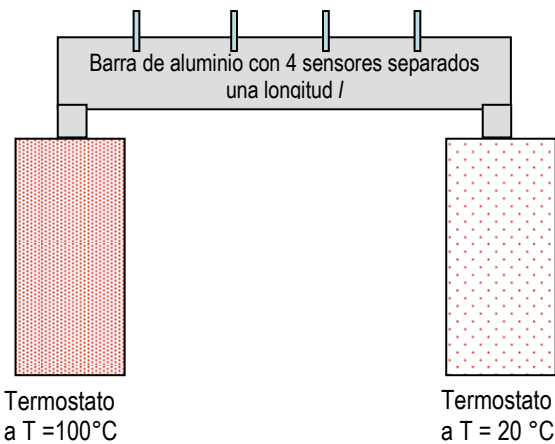


Figura 1. Esquema del aparato de conducción térmica.

Consideramos una barra de aluminio de sección transversal cuadrada, con patas en sus extremos y huecos equidistantes donde se colocan los sensores térmicos, como se muestra en la Fig. 1. Inicialmente la barra está toda dentro de un termostato a temperatura ambiente. A un cierto momento, una pata se saca del termostato y se mete en otro termostato con agua hirviendo. Igual que en el experimento, en la simulación se observan: la evolución temporal de la temperatura de los sensores; los fenómenos transitorios en la evolución al equilibrio de

las potencias caloríficas, los gradientes y diferencias de temperatura, con sus semejanzas y diferencias; y las condiciones de equilibrio en el estado estacionario.

El modelo usado en la simulación es muy básico. Considera los volúmenes centrados en cada sensor y limitados por el plano medio entre los sensores. De acuerdo con la ley de Fourier, hay un flujo de potencia calorífica  $q_j$  por esos planos, dirigido del punto a mayor temperatura al más frío, dado por el producto  $q_j = -kA \text{grad } T_{j+\frac{1}{2}}$  con  $k$  la conductividad térmica y  $A$

el área de la barra y el gradiente de temperatura evaluado en el plano medio, que se puede aproximar por la diferencia  $(T_{j+1} - T_j) / l$ . La potencia calorífica neta que causa un cambio de temperatura en el volumen es entonces la diferencia entre los flujos por los planos a cada lado,  $r_j = q_j - q_{j-1}$ . Finalmente, la temperatura cambiará con una rapidez  $\frac{dT_j}{dt} = \frac{\kappa}{l} \left( \frac{r_j}{A} \right)$  con  $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$  la difusividad

térmica,  $\rho$  la densidad y  $c_p$  la capacidad calorífica a presión constante. En los extremos, donde las patas están sumergidas en agua a distinta temperatura y la transferencia de calor es convectiva, la potencia calorífica está dado por la ley de Newton  $q_{conv} = hA_s (T_{agua} - T_{barra})$  con  $h$  el coeficiente de convección,  $A_s$  la superficie de transferencia y  $T_{barra}$  la temperatura de la superficie de la barra en cada extremo.

**3.4 Red unidimensional de circuitos RC.** Por la particular importancia de los circuitos eléctricos, es esencial que el alumno los conozca y asimile que se puede observar la tensión en cada uno de sus nodos. Las líneas de transmisión eléctrica suelen simplificarse por modelos discretos que las representan como circuitos con elementos “concentrados”, lo que lleva directamente a considerar, si la inductancia es despreciable, una red RC conectada a una fuente de tensión  $E_o(t)$  con resistencia interna  $R_s$  que tiene en su otro extremo una carga  $R_L$ . Queremos encontrar las tensiones  $e_k(t)$  en cada nodo para  $n$  nodos. Las ecuaciones de nodo de Kirchhoff y la definición de capacitancia nos llevan de inmediato<sup>6</sup> a plantear para cada nodo las ecuaciones diferenciales acopladas

$$\frac{de_k}{dt} = \frac{i_{k-1}}{C} - \frac{i_k}{C} = \frac{e_{k-1} - e_k}{RC} - \frac{e_k - e_{k+1}}{RC} \quad (3)$$

para  $k = 2, 3, \dots, n-1$ , con las condiciones en la frontera

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{E(t) - e_1}{R_s C} - \frac{e_1 - e_2}{RC} \quad \text{y} \quad (4)$$

$$\frac{de_n}{dt} = \frac{e_{n-1} - e_n}{RC} - \frac{e_n}{R_L C}$$

Escribiendo las relaciones entre corrientes, tensiones y sus derivadas, en la simulación encontramos estas cantidades como función del tiempo para cualquier tensión de la fuente. En particular, conviene considerar que en  $t = 0$  se cierra un interruptor en la rama de la fuente con tensión  $E(t) = a + b \text{sen}(\omega t)$  y observar cómo varía la tensión en cada nodo inicialmente con tensión nula. Así

se nota el efecto de filtraje de la red y la disminución del rizo conforme se avanza en ella.

**3.5 Caída de un objeto esférico en un medio disipativo.** Para la fuerza viscosa sobre una esfera de diámetro  $D$  que se mueve con velocidad  $v$  en un fluido, generalmente se supone válida la ley de Stokes  $F_v = 3\pi\eta D v$ , mientras que la fuerza de arrastre está dada por  $F_a = \pi C D^2 \rho^2 v^2$  con  $\rho$  la densidad del fluido y  $C \approx 1/2$  para la esfera.

Aquí la simulación ayuda para el diseño de un experimento en el que la disipación: a) si la velocidad es suficientemente pequeña, es de tipo resistencia viscosa y obtendremos la viscosidad  $\eta$  y, b) a velocidad suficientemente grande, es causada por turbulencia y obtendremos el coeficiente de arrastre  $C$ . Véase, por ejemplo [7], que igual que muchos otros textos, no incorpora la fuerza de flotación. Para facilitar la comparación de los resultados de la simulación, incluimos los términos de ambos tipos en la expresión de la fuerza disipativa, y hacemos alternadamente cero el coeficiente de cada uno.

## 4 Conclusiones

Estos ejemplos ayudan al alumno a visualizar la situación, analizarla y contrastarla con la realidad, permitiéndole comprender los fenómenos físicos y las situaciones particulares que cada modelo considera, sin necesidad de que comprenda y maneje las técnicas matemáticas que permiten llegar a la solución de las ecuaciones de cada problema.

A pesar de la complejidad relativa de los modelos y fenómenos simulados, los resultados que se obtienen se le pueden presentar al alumno para visualizar y comprender mejor los fenómenos.

Se aprovecha el uso de la informática que permite la repetición, reflexión y la exploración para reconocer el rol de variables y parámetros, para aumentar la motiva-

ción del estudiante; ayudar a la comprensión de los modelos, su alcance y límites, además de que permite afianzar sus habilidades de observación, descripción, análisis, reflexión y sacar conclusiones.

De parte del profesor, requiere: un profundo conocimiento de la física asociada a cada fenómeno; estar siempre al día de la evolución del conocimiento y una investigación permanente en el aula para identificar necesidades, cambios y logros.

## Agradecimientos

Queremos hacer patente nuestro agradecimiento a los Profesores Marisa Michelini y Mario Raimondi del Departamento de Física de la Universidad de Udine y el Departamento de Químico-Física de la Universidad de Milán por su hospitalidad y valiosas discusiones durante nuestra estancia sabática.

## Referencias

1. D. F. Fanelli, J. I. Bubb and C. P. Bean, Phys. Teach. Nov., p. 548 (1990)
2. J. Dutkiewicz, AUTEX Research Journal Vol. 2, No. 3, p. 153, (2002).
3. W. T. Thomson, Teoría de Vibraciones, Aplicaciones, cap. 3, sección 3.1. (Prentice/Hall, Madrid, 1983)
4. J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, lessons 2-15, pp. 11-119 (Wiley, N. Y. 1982).
5. A. N. Tjonov, A. A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática, 3ª edición, cap. III, pp. 189-296 (Mir, Moscú, 1983).
6. G. Goertzel and N. Tralli, Some Mathematical Methods of Physics., capítulos 6-7, pp. 73-95 (McGraw-Hill, N. Y. 1960)
7. R. A. Serway, Physics For Scientists and Engineers with Modern Physics. 3rd edition. pp. 137-141 (Saunders, Philadelphia, 1990).