



Estudio de una gota de lluvia de masa variable con la ayuda de software de cálculo y simulación

A. Hurtado Márquez^a, M. Fonseca^b

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia, fisinfor@udistrital.edu.co

^aProyecto Curricular de Licenciatura en Física, ahurtado@udistrital.edu.co[†]

^bProyecto Curricular de Tecnología/Ingeniería Mecánica, mfonseca@udistrital.edu.co

[†] Autor para la correspondencia

Recibido el 1/06/2007. Aprobado en versión final el 15/06/2007.

Sumario. Reproducir fenómenos aparentemente cotidianos en el laboratorio no siempre es del todo fácil, y más aún cuando requerimos de éstos para explicar ciertos conceptos físicos. Por eso, el presente artículo quiere mostrar cómo estudiar, con la ayuda de herramientas computacionales como Mathcad y/o Interactive Physics el caso de una gota de lluvia que cae a través de una nube de gotitas de agua, algunas de las cuales se adhieren a la gota, y esto hace que la masa de la gota vaya aumentando gradualmente.

Abstract. Reproducing apparently daily phenomena in the laboratory is not easy at all specially when we require them to explain certain physical concepts. Thus, the present article tries to show how we can study, by using computational tools like Mathcad and/or Interactive Physics, the case of a rain drop that falls through a cloud of water droplets, some of which adhere to the drop, making the mass of the drop to increase gradually.

Keywords. Computer in education 01.50.H., Computer modeling and simulation 07.05.Tp

1 Introducción

La labor docente en el trabajo experimental, como es el caso en la disciplina de la Física, vista como un proceso de enseñanza-aprendizaje, siempre implica nuevos retos y en especial cuando se trata de fenómenos que no siempre pueden ser reproducibles de manera observable y a la vez obtener la medición de algunas variables que intervienen en el mismo.

Surgen situaciones problemáticas planteadas en las aulas de clase y/o a su vez en los libros de textos^{1,2}, que no pueden ser abordados por métodos puramente experimentales y es deber del educador y del estudiante interesado por la Física, buscar otras soluciones a los mismos. Por ello los métodos de simulación y la ayuda con herramientas informáticas, software de física y/o matemáticas, son necesarios generalmente en estos casos.

Así por ejemplo, cuando se plantea que una gota de

lluvia cae a través de una nube de gotitas de agua, algunas de las cuales se adhieren a la gota, hacen que exista un aumento de la masa de la gota al caer y en dicho procesos pueden presentarse diferentes eventos que no son fáciles de predecir y cuya solución puede conllevar a diferentes interpretaciones. A continuación, se mostrará una de tantas opciones, se plantearán los modelos teóricos y se dará la solución usando simultáneamente software de simulación como lo es el Interactive Physics y de cálculo numérico, como Mathcad.

2 Modelación Física y Matemática

Si se considera el caso de una gota de agua que cae desde cierta altura y para el análisis del movimiento de la misma usamos la segunda ley de Newton, se tendría que la fuerza externa resultante sobre dicha gota es:

$$F_{ext} = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

En adelante las soluciones dependen del modelo que se use^{1,2}, por ejemplo Sears¹ propone que si se supone $dm/dt = bv$, la masa de la gota depende de la distancia “y” que ha caído, es decir, $m = by$, donde b es una constante, y. Dado que $F_{ext} = mg$, se obtiene

$$mg = m \frac{dv}{dt} + bv^2 \quad (2)$$

y reemplazando $m = by$, $v = dy/dt = \dot{y}$, $dv/dt = \ddot{y}$ dividiendo entre b y reordenando se obtiene,

$$y \cdot \ddot{y} + \dot{y}^2 - g \cdot y = 0 \quad (3)$$

Una solución particular de esta ecuación de esta ecuación diferencial escrita apropiadamente es

$$y = (1/2) at^2, \text{ de donde resulta,} \quad a = g/3 \quad (4)$$

Siendo a una constante igual a la aceleración de la gota. Con este resultado se puede afirmar que el movimiento de la gota es uniformemente acelerado, pareciera que no depende de la masa variable de la gota que a su vez depende de b que además depende de la densidad de la nube de gotitas.

Un modelo más elaborado es trabajado por Adawi³ y una versión más reciente es planteada por Franco (*Física con ordena-*

dor, <http://www.sc.edu/sbweb/fisica/dinamica/gota/gota.htm>) para el incremento de la masa de la gota con el tiempo a medida que absorbe gotitas en su caída; al suponer que el incremento de masa es proporcional a la sección transversal de la gota y a la velocidad de la gota.

$$dm/dt = a(\text{área}) \times (\text{rapidez}) = a \pi r^2 = \rho_n \pi r^2 = km^{2/3} v \quad (5)$$

$$\text{con: } k = \frac{\rho_n \pi}{\left(\rho_a \frac{4}{3} \pi\right)^{2/3}} \quad (6)$$

siendo πr^2 el área trasversal de la gota supuesta esférica, ρ_n es la densidad de la niebla, v es la rapidez de la gota, m es la masa de la gota, y ρ_a es la densidad del agua. Si $dm/dt = km^{2/3} dy/dt$, e integrando se tiene

$$m = \left(\frac{1}{3} ky + m_0^{1/3}\right)^3 \quad (7)$$

y al reemplazar b por $km^{2/3}$ en la ecuación (2), y al dividir por m resultaría

$$g = \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m^{1/3}} v^2 \quad (8)$$

y reemplazando m se tiene

$$g = \frac{dv}{dt} + \frac{k}{\frac{1}{3} ky + m_0^{1/3}} v^2 \quad (9)$$

Al suponer de nuevo una solución particular $y = (1/2) at^2$, se obtiene que la aceleración es $a = g/3$, aunque la ecuación diferencial no es fácilmente soluble analíticamente, si podemos apoyarnos en programas informáticos como Mathcad, y resolverlo numéricamente o ver su compor-

tamiento con un programa de simulación.

3 Solución usando el programa Mathcad

Supóngase una gota esférica inicial de radio 0.1 mm, y para una densidad de niebla del orden de 10^{-3} kg/m^3 , se calculan la masa inicial y al constante k, mostrados en la figura 1 (programa Mathcad). Los valores corresponden a unidades en el sistema Internacional: masa m_0 en kg, velocidad en m/s, etc. En este programa, la ecuación diferencial y las condiciones iniciales se escriben dentro del bloque que inicia con la palabra clave “Given” y termina con “y=odesolve(t, t_{final}, número de pasos)”.

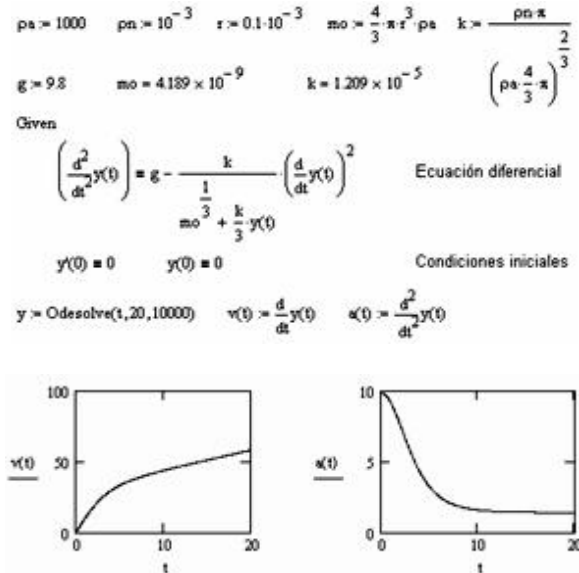


Figura 1. Programa Mathcad, Datos y bloque de solución de una ecuación diferencial

4 Simulación en Interactive Physics

Los pasos básicos para la simulación de la caída de un “objeto” (gota de agua), representada por un círculo en Interactive Physics, se ilustran en el libro, Física con Interactive Physics⁴; en resumen, se selecciona la herramienta círculo, se va al espacio de trabajo, se dibuja una circunferencia de radio deseado, se pica en “run” y está la simulación de un objeto circular que cae. Para el caso de la gota que ahora nos ocupa se deben controlar algunas variables, como que la posición inicial sea (0,0), la velocidad inicial también sea (0,0), para ello clic-clic en la gota, se dan los valores indicados, con especial cuidado en establecer la masa, que en este caso depende de la posición de acuerdo a la ecuación (7) reemplazando apropiadamente los valores numéricos como la masa = $(0.00161 - 0.00000403 * \text{body}[1].p.y)^3$, (figura 2a). Luego sobre el objeto se aplica una fuerza hacia arriba (usando la herramienta de fuerza), que tenga el valor $F_y = (0.00001209 * \text{sqr}(\text{Body}[1].v.y) * (0.00161 - 0.00000403 * \text{body}[1].p.y)^2)$, (figura 2b).

En la figura 3 se muestra la simulación con gráficas de aceleración y velocidad, nótese que en *Interactive Physics* la velocidad y aceleración son negativas a diferencia del modelo matemático en el que se ha escogido “y” positivo hacia abajo. Se observa que la aceleración tiende asintóticamente a $g/7$.

En la simulación también se observan indicadores numéricos, muestran que el valor estacionario es posterior a 10 segundos cuando la gota ha caído 293 metros.

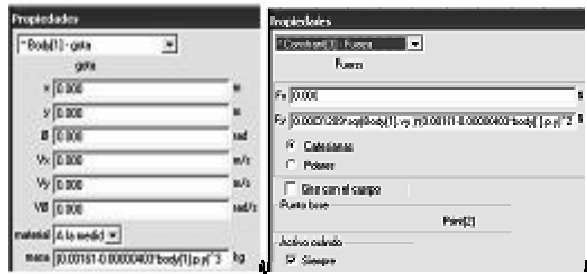


Figura 2. Propiedades a) del objeto para escribir la masa. b) de la fuerza

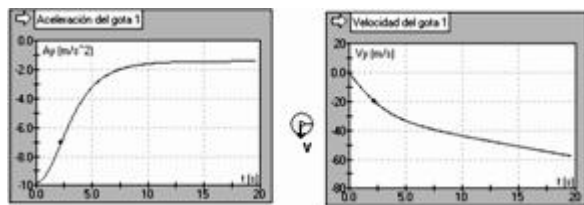


Figura 3. Simulación con medidores de aceleración y velocidad.



Figura 4. Medidores de tiempo, aceleración, velocidad y posición de la gota.

Como se observa en la gráfica de aceleración, ésta NO es constante y las soluciones particulares dadas corresponden a estados estacionarios para tiempos relativamente grandes (en este caso aproximadamente 10 segundos).

5 Conclusiones

La integración del análisis matemático y físico, la simulación y el cálculo numérico para mostrar las diferentes opciones de resolver a un problema planteado, que experimentalmente sería muy difícil reproducir, hacen ver las bondades de otras alternativas pedagógicas para la enseñanza de la física usando herramientas informáticas. El modelo matemático requiere aún de ajustes para que los resultados coincidan con los reportes que indican que las gotas caen con velocidad límite del orden de 10 m/s. una prueba sencilla en Mathcad, asumiendo el aumento de la masa proporcional al cuadrado de la rapidez, a los 5 segundos la aceleración es menor que 0.1 m/s^2 y la velocidad es de 11.3 m/s en apenas 48 metros de recorrido.

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias y Educación, a la Facultad Tecnológica y al Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital, por el apoyo a los miembros del grupo Física e Informática.

Referencias

1. F. W. Sears, , M. W. Zemansky, H. D. Young, , R. A. Freedman), *Física Universitaria*, Addison Wesley Longman, Vol. 1, Undécima edición., México. Pág.112 (2004).
2. K. S. Krane, *Amer. Jour. Phys.*, vol 49, pp. 113-7 ()
3. I. Adawi I. *Comments on the raindrop problem*. Am. J. Phys. 54 (8) pp. 739-740 (1986)
4. A. Hurtado, M. Fonseca, *Física con Interactive Physics*, 1ª Ed., Bogotá, D.C., Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas, pp. 17-23 (2002).