*Rev. Cub. Física vol.24, No. 2 (2007) p.148-153*
*ISSN: 0253-9268. Original paper*

**Revista Cubana de Física**
Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana.
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

# Ondas cinemáticas regulares por piezas: obtención de las cadenas de Maslov.

José R. Talavera Hurtado

Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, Cuba; talavera@matcom.uh.cu

Recibido el 15/7/2007. Aprobado en versión final el 6/12/2007

**Sumario.** Se aplica el método de las cadenas de Maslov al estudio de las ondas cinemáticas suaves por piezas. Para cada intervalo temporal estructurado y cada trayectoria singular asociada al mismo, la solución física presenta una pieza suave superior y otra inferior. El método presupone que ellas admiten desarrollos en serie de potencias centrados en tal trayectoria, pudiendo así ser prolongadas hacia la otra parte de la misma. La diferencia (función salto) entre las piezas matemáticamente prolongadas -de la solución física- admite entonces un desarrollo en serie similar. Imponiendo la forma diferencial de la ley de conservación -a ambos lados de tal trayectoria – y la condición de salto de Hugoniot; se obtienen las condiciones de cadena de Maslov, en una forma preliminar no standard. Ellas conforman un conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales con infinitas funciones incógnitas: la trayectoria singular y los coeficientes de los desarrollos de las piezas asociadas. Se obtienen relaciones recursivas adicionales que involucran a los coeficientes del desarrollo de la función salto. Estas relaciones nos ayudan a resolver la indeterminación que se presenta en la condición de Hugoniot cuando el orden de ruptura no es nulo. Las condiciones de cadena de Maslov se rescriben entonces en forma equivalente pero standard.

**Abstract.** The Maslov chains method is applied to the study of smooth by pieces kinematics waves. For any structured time interval and any associated singular path, we have an upper and a lower (physically meaningful) smooth piece of the solution. The method presupposed that they admit power series expansions centered at the singular path; in consequence, both pieces of the physical solution can be -mathematically- continued to the other side of that path. Then, the difference (jump function) between these mathematically extended pieces has a similar expansion. By imposing the differential form of the conservation law -at both sides of the singular path- and the Hugoniot jump condition, the Maslov chain conditions (in a preliminary -non standard- form) are obtained. They are a set of infinitely many differential equations with infinitely many unknowns: the singular path and the coefficients of the expansions of the two associated smooth pieces. Recursive relations involving the coefficients of the expansion of the jump function are also derived. These relations help us to resolve the indetermination who is present in the Hugoniot jump condition when the rupture order is not cero. The Maslov chains are then rewritten in an equivalent but standard form.

**Palabras clave.** Leyes de conservación dinámica fluidos 47.10.ab, Kinematics deformation (rheology) 83.10.Bb, Optical Ray Tracing 42.15.Dp, Perturbation theory applied to continuum mechanics 46.15.Ff.

## 1 Introducción

Las ondas cinemáticas suaves por piezas[1] son de gran interés en física e ingeniería[2] y pueden -en principio- estudiarse con el auxilio de diversas técnicas matemáticas[1-4]. El enfoque básico consiste en construir dichas soluciones generalizadas[1] (clásicas) auxiliándose del método de las características y de las condiciones de salto de Hugoniot[1, 2]. El estudio de ejemplos concretos muestra, no obstante, que en muchos casos se necesita apelar a consideraciones adicionales[2] que pueden ser de carácter tanto geométrico como analítico, o bien, de naturaleza física.

Los desarrollos (formales) en series[3] han aportado una herramienta analítica la cual, más allá de su probada eficacia o potencia, debe considerarse igualmente básica por su capacidad para iluminar diversos aspectos que son de interés esencial. Aplicando dichos desarrollos en serie, estudiaremos las soluciones suaves por piezas para una clase bastante amplia de leyes de conservación escalares: aquellas donde el flujo es una función (real) entera de la densidad.

El eje temporal, o la parte del mismo que sea de interés, puede subdividirse[1] en intervalos temporales estructurados $I$ con los cuales se conforman bandas disjuntas y rampantes $I \times \mathbb{R}_x$, las que a su vez se subdividen en regiones (donde existen soluciones suaves clásicas) delimitadas por trayectorias singulares. Eligiendo un intervalo temporal estructurado $I$ y -en este- una trayectoria singular $x = \chi(t)$; tenemos las llamadas[1] regiones de suavidad superior $S_\chi^+$ e inferior $S_\chi^-$ y las correspondientes "piezas suaves" $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$ de la densidad, que pueden prolongarse suavemente[1, 5] desde el interior de la correspondiente región de suavidad- hasta la trayectoria singular $x = \chi(t)$.

La técnica de las cadenas de Maslov[3] introduce una hipótesis de trabajo adicional: en nuestro caso debemos suponer que cada pieza suave de la densidad - $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$ - puede prolongarse hacia la otra parte de la trayectoria singular $x = \chi(t)$ mediante un desarrollo en potencias de $x - \chi(t)$. Dichos desarrollos resultan válidos, en determinadas vecindades (fajas) en derredor de la trayectoria singular.

Además, se trata de desarrollos de carácter formal con los cuales operamos de modo "natural". Conforme a la metodología más usual de la física-matemática, se postergan las justificaciones exhaustivas para el momento en que se halla resuelto un problema (o una clase de problemas) de forma acabada. En nuestro caso esto es particularmente necesario pues, en dependencia del problema concreto, los desarrollos en serie pueden resultar de distinta naturaleza: convergentes (en el sentido usual), o bien asintóticos, por ejemplo. De hecho, utilizamos el término de "solución regular por piezas" para referirnos a las soluciones suaves por piezas que se avienen a esta técnica de trabajo.

Las condiciones de cadena se obtienen (como condiciones necesarias) al imponer que los desarrollos propuestos satisfagan la ley de conservación en forma diferencial –a cada lado de la trayectoria singular, donde los valores del desarrollo en serie de la correspondiente pieza suave tienen sentido físico - y la condición de Hugoniot. Dichas condiciones de cadena conforman un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales con infinitas funciones incógnitas: la trayectoria singular y los coeficientes de ambos desarrollos en serie.

De forma directa, las ecuaciones aparecen en forma estándar tan solo para ondas de choque; posiblemente esta es la causa de que las cadenas de Maslov prácticamente no se hallan empleado para el estudio de rupturas de orden superior[1]. En el presente trabajo, demostraremos - después de algunos desarrollos y análisis- que su aplicación es también posible en tales casos.

Las prolongaciones mediante series de las "piezas suaves de la solución" hacia la otra parte de la trayectoria singular, facilitan estudiar el salto que experimenta la densidad al cruzar dicha trayectoria, pues permiten considerar la función $\rho^\pm(t,x) = \rho^+(t,x) - \rho^-(t,x)$ que resulta definida - mediante un desarrollo en serie- en toda una vecindad (faja) que cubre la trayectoria de la singularidad.

Al encontrar las relaciones recursivas -a las que también podemos referirnos como condiciones de cadena- para los coeficientes del desarrollo en serie de $\rho^\pm(t,x)$, se abre el camino para resolver la indeterminación que aparece en la condición de Hugoniot. Con esto, dicha condición -y con ella todo el sistema de condiciones de cadena- se puede escribir en forma standard con toda generalidad.

## 2 Desarrollos en serie

Consideraremos flujos que admitan desarrollos en serie del tipo:

$$\Phi(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} \rho^n \quad (\rho \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

limitando así nuestro estudio al caso en que los flujos sean funciones reales enteras de la densidad.

En el caso de las ondas cinemáticas suaves por piezas[1] el eje temporal "$t$" -o bien, la parte del mismo que nos interese para nuestro estudio, usualmente un intervalo- puede particionarse en intervalos (abiertos) temporales estructurados[1]. Concentremos nuestra atención en cierto intervalo temporal estructurado $I$ y cierta trayectoria singular $x = \chi(t)$ ($t \in I$). En cada una de las regiones de suavidad[1] superior e inferior, $S_\chi^+$ y $S_\chi^-$, la densidad $\rho(t,x)$ es una solución clásica suave y las restricciones de $\rho(t,x)$ a $S_\chi^+$ y $S_\chi^-$ (respectivamente) pueden prolongarse de forma suave[1, 5] desde el interior de dichas regiones hasta la curva $x = \chi(t)$ ($t \in I$); obteniendo así las funciones $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$, de forma que:

$$\frac{\partial \rho^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^+) = 0; \quad (t,x) \in S_\chi^+ \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^-) = 0; \quad (t,x) \in S_\chi^- \tag{3}$$

En lo que sigue supondremos que, para cada $t \in I$, resulta válido el desarrollo:

$$\rho^+(t,x) = \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^+(t)\left[x - \chi(t)\right]^s \tag{4}$$

para $|x - \chi(t)| < \varepsilon^+(t)$ donde $\varepsilon^+(t) > 0$ ($t \in I$). Los coeficientes del desarrollo (4) vienen dados por:

$$\rho_s^+(t)=\frac{1}{s!}\frac{\partial^s\rho^+}{\partial x^s}(t,\chi(t))=\frac{1}{s!}\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)+0) \qquad (5)$$

Similarmente, supondremos que para cada $t\in I$:

$$\rho^-(t,x)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^-(t)\left[x-\chi(t)\right]^s \qquad (6)$$

para $\left|x-\chi(t)\right|<\varepsilon^-(t)$ donde $\varepsilon^-(t)>0$ ($t\in I$). Los coeficientes del desarrollo (6) vienen dados por:

$$\rho_s^-(t)=\frac{1}{s!}\frac{\partial^s\rho^-}{\partial x^s}(t,\chi(t))=\frac{1}{s!}\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t,\chi(t)-0) \qquad (7)$$

Debe tenerse presente que las funciones $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$, dadas por los desarrollos en serie (4) y (6), son auxiliares matemáticos cómodos, que solo se corresponden con los valores físicos reales de la densidad $\rho=\rho(t,x)$ en las regiones $S_\chi^+\cap\left\{\left|x-\chi(t)\right|<\varepsilon^+(t)\right\}$ y $S_\chi^-\cap\left\{\left|x-\chi(t)\right|<\varepsilon^-(t)\right\}$ respectivamente. Los desarrollos (4) y (6) tienen carácter formal y operaremos con ellos de modo "natural".

En lo que sigue sobreentenderemos que $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$ provienen de los desarrollos (4) y (6), por ello la información que nos dan las ecuaciones (2) y (3) - directamente - resulta ser:

$$\frac{\partial\rho^+}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^+)=0;\ S_\chi^+\cap\left\{\left|x-\chi(t)\right|<\varepsilon^+(t)\right\} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\rho^-}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^-)=0;\ S_\chi^-\cap\left\{\left|x-\chi(t)\right|<\varepsilon^-(t)\right\} \qquad (9)$$

Por su parte, la condición de Hugoniot[1, 2] puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}&\left[\rho^+(t,\chi(t))-\rho^-(t,\chi(t))\right]\dot{\chi}(t)=\\&=\Phi[\rho^+(t,\chi(t))]-\Phi[\rho^-(t,\chi(t))]\quad(t\in I)\end{aligned} \qquad (10)$$

## 3 Condiciones de cadena: forma preliminar no standard

Usando el desarrollo (1) en la ecuación (8):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^+(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\left[\rho^+(t,x)\right]^n=0$$

La suma comienza con $n=1$ pues $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(0)=0$. Sustituyendo (4) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^+(t)\left[x-\chi(t)\right]^s+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^+(t)\left[x-\chi(t)\right]^s\right\}^n=0$$

Desarrollando la potencia de orden $n$ de la serie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^+(t)\left[x-\chi(t)\right]^s+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{|m|=s}\prod_{i=1}^{n}\rho_{m_i}^+(t)\left[x-\chi(t)\right]^s=0$$

Aquí se suma para $|m|=m_1+\cdots+m_n=s$ donde $0\le m_i\le s$ para $i=1,\cdots,n$. Derivando dentro de las series:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{d\rho_s^+(t)}{dt}\left[x-\chi(t)\right]^s-s\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_s^+(t)\left[x-\chi(t)\right]^{s-1}\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}s\sum_{|m|=s}\prod_{i=1}^{n}\rho_{m_i}^+(t)\left[x-\chi(t)\right]^{s-1}=0$$

Acomodando los índices (mudos) de suma:

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{d\rho_s^+(t)}{dt}-(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^+(t)+(s+1)\times\right.\\&\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{|m|=s+1}\prod_{i=1}^{n}\rho_{m_i}^+(t)\right\}\left[x-\chi(t)\right]^s=0\end{aligned} \qquad (\text{“8”})$$

Para cada $t\in I$, la serie anterior se anula, de conformidad con (8), para todo valor de $x$ en el rango o intervalo tal que $(t,x)\in S_\chi^+\cap\left\{\left|x-\chi(t)\right|<\varepsilon^+(t)\right\}$. Por ello sus coeficientes tienen que ser nulos ($t\in I$):

$$\frac{d\rho_s^+(t)}{dt}=(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^+(t)+$$

$$-(s+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{|m|=s+1}\prod_{i=1}^{n}\rho_{m_i}^+(t)$$

En el rango $s=0,1\cdots,+\infty$. Desplegando el producto:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_s^+(t)}{dt}&=(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^+(t)+\\&-(s+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^+(t)\cdots\rho_{m_n}^+(t)\end{aligned} \qquad (11)$$

En forma completamente análoga se obtiene que, también para el rango $s=0,1\cdots,+\infty$ ($t\in I$):

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_s^-(t)}{dt}&=(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^-(t)+\\&-(s+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^-(t)\cdots\rho_{m_n}^-(t)\end{aligned} \qquad (12)$$

La condición de Hugoniot (10) puede expresarse equivalentemente, usando (1), (4) y (6), como:

$$[\rho_0^+(t)-\rho_0^-(t)]\dot{\chi}(t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\left\{[\rho_0^+(t)]^n-[\rho_0^-(t)]^n\right\}\quad(t\in I)$$

Desarrollando la diferencia de potencias y agrupando, podemos escribirla como ( $t\in I$ ):

$$[\rho_0^+(t)-\rho_0^-(t)]\times\left\{\overset{\bullet}{\chi}(t)+ -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^+(t)]^{n-1-i}[\rho_0^-(t)]^i\right\}=0 \quad (13)$$

**CONCLUSIÓN I:** Las relaciones (11), (12) y (13) son ya, las condiciones de cadena de Hugoniot-Maslov (en forma preliminar no standard).

No se presentan en forma standard debido a que en (13) la derivada $\overset{\bullet}{\chi}(t)$ no aparece despejada. Para el caso particular en que la trayectoria singular considerada $x=\chi(t)$ ( $t\in I$ ) sea un frente de onda de choque – orden de ruptura nulo[1] - tendremos que para todo $t\in I$ :

$$\rho_0^+(t)-\rho_0^-(t)=\rho^+(t,\chi(t))-\rho^-(t,\chi(t))\neq 0$$

En este caso la derivada $\overset{\bullet}{\chi}(t)$ puede despejarse fácilmente de (13) y las condiciones de cadena quedan - después de sustituir la expresión resultante para $\overset{\bullet}{\chi}(t)$ en (11) y (12)- en forma standard.

Pero nuestro propósito (ondas cinemáticas regulares por piezas) es bastante más amplio: incluye la posibilidad de trayectorias singulares donde existan puntos con orden de ruptura[1] no nulo. Para poder obtener las condiciones de cadena en forma standard en el caso general, necesitamos de algunos desarrollos y análisis previos.

## 4 Relaciones recursivas para el salto de la solución al cruzar una trayectoria singular

En la sección anterior se obtuvieron las condiciones de cadena (11), (12) y (13) partiendo de los desarrollos en serie (1), (4) y (6) y de las ecuaciones (8), (9) y (10). Concretamente, haciendo uso de (1) y (4), la ecuación (8) toma la forma (“8”) de un desarrollo en potencias de $x-\chi(t)$ que resulta nulo en el rango de validez común a (4) y (8). Para cada $t\in I$ fijo, la serie obtenida -el miembro izquierdo de (“8”)- se anula entonces en todo un intervalo –no vacío- de variación de $x$ . Por tanto dicha serie tiene que ser nula en todo su rango de validez (moviéndose $x$ con $t$ fijo). De aquí se deduce sin dificultad que las funciones $\rho^+(t,x)$ y $\rho^-(t,x)$ , dadas por los desarrollos en serie (4) y (6), satisfacen ecuaciones análogas a (8) y (9) en todo el rango de validez de los desarrollos en serie (4) y (6):

$$\frac{\partial\rho^+}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^+)=0;\quad \{t\in I;|x-\chi(t)|<\varepsilon^+(t)\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial\rho^-}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^-)=0;\quad \{t\in I;|x-\chi(t)|<\varepsilon^-(t)\} \quad (15)$$

Restando tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^+-\rho^-\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(\rho^+)-\Phi(\rho^-)\right]=0$$

Que resulta válida para $\{t\in I;|x-\chi(t)|<\varepsilon(t)\}$ donde $\varepsilon(t)=\min\{\varepsilon^+(t),\varepsilon^-(t)\}>0$ ( $t\in I$ ). Usando el desarrollo (1) en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^+-\rho^-\right)+\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\left[\left(\rho^+\right)^n-\left(\rho^-\right)^n\right]=0$$

Factorizando la diferencia de potencias:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^+-\rho^-\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\rho^+-\rho^-\right)\times \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\rho^+\right)^{n-1-i}\left(\rho^-\right)^i\right]=0 \quad (16)$$

En la región $\{t\in I;|x-\chi(t)|<\varepsilon(t)\}$ está definida la función diferencia:

$$\rho^{\pm}(t,x)=\rho^+(t,x)-\rho^-(t,x) \quad (17)$$

cuyo desarrollo en serie resulta inmediato:

$$\left.\begin{aligned}\rho^{\pm}(t,x)&=\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^{\pm}(t)\left[x-\chi(t)\right]^s\\ \rho_s^{\pm}(t)&=\rho_s^+(t)-\rho_s^-(t)\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Introduciremos también la función auxiliar:

$$F(t,x)= =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho^+(t,x)]^{n-1-i}[\rho^-(t,x)]^i \quad (19)$$

Cuyo desarrollo en serie es:

$$F(t,x)=\sum_{s=0}^{\infty}F_s(t)\left[x-\chi(t)\right]^s \quad (20)$$

Obsérvese que en particular:

$$F_0(t)=F(t,\chi(t))= =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^+(t)]^{n-1-i}[\rho_0^-(t)]^i \quad (21)$$

De (17) y (19) vemos que (16) puede escribirse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\pm}(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{\pm}(t,x)F(t,x)\right)=0$$

O bien, usando los desarrollos (18) y (20):

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^{\pm}(t)\left[x-\chi(t)\right]^s+ +\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s^{\pm}(t)\left[x-\chi(t)\right]^s\sum_{s=0}^{\infty}F_s(t)\left[x-\chi(t)\right]^s\right)=0$$

Derivando respecto al tiempo dentro de la primera serie y efectuando el producto de series indicado dentro del paréntesis precedido por el operador $\partial/\partial x$ :

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{d\rho_s^{\pm}(t)}{dt}[x-\chi(t)]^s - s\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_s^{\pm}(t)[x-\chi(t)]^{s-1}\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s}\rho_{s-j}^{\pm}(t)F_j(t)[x-\chi(t)]^s\right)=0$$

Derivando respecto a la variable espacial $x$ dentro de la segunda serie:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{d\rho_s^{\pm}(t)}{dt}[x-\chi(t)]^s - s\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_s^{\pm}(t)[x-\chi(t)]^{s-1}\right\}+$$
$$+\left(\sum_{s=0}^{\infty}s\sum_{j=0}^{s}\rho_{s-j}^{\pm}(t)F_j(t)[x-\chi(t)]^{s-1}\right)=0$$

Luego, acomodando los índices (mudos) de suma y arreglando:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{d\rho_s^{\pm}(t)}{dt}-(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^{\pm}(t)+\right.$$
$$\left.+(s+1)\sum_{j=0}^{s+1}\rho_{s+1-j}^{\pm}(t)F_j(t)\right\}[x-\chi(t)]^s=0$$

La igualdad anterior es válida en la región $\{t\in I;|x-\chi(t)|<\varepsilon(t)\}$. Luego todos los coeficientes del desarrollo del miembro izquierdo tienen que anularse; es decir ($t\in I;\ s=0,1,\cdots,+\infty$):

$$\frac{d\rho_s^{\pm}(t)}{dt}=(s+1)\frac{d\chi(t)}{dt}\rho_{s+1}^{\pm}(t)+ -(s+1)\sum_{j=0}^{s+1}\rho_{s+1-j}^{\pm}(t)F_j(t) \tag{22}$$

Teniendo en cuenta (13) y (18b):

$$\rho_0^{\pm}(t)\left\{\dot{\chi}(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i}\right\}=0$$

Lo cual, recordando (21) puede escribirse en forma más breve como:

$$\rho_0^{\pm}(t)\left\{\dot{\chi}(t)-F_0(t)\right\}=0 \tag{23}$$

**CONCLUSIÓN II:** Las condiciones (22) y (23) son relaciones recursivas de interés que involucran a los coeficientes de la función diferencia:

$$\rho^{\pm}(t,x)=\rho^{+}(t,x)-\rho^{-}(t,x)$$

## 5 Condiciones de cadena: forma general standard

Supongamos – para llegar a un absurdo – que para cierto $t_0\in I$:

$$\dot{\chi}(t_0)-F_0(t_0)\neq 0$$

Entonces existe $\tau>0$ tal que

$$\dot{\chi}(t)-F_0(t)\neq 0\ ;\ \forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau)$$

De (23) se deduce entonces que

$$\rho_0^{\pm}(t)=0\ ;\ \forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau)$$

Tomando $s=0$ en (22) obtenemos

$$\rho_1^{\pm}(t)\left[\frac{d\chi(t)}{dt}-F_0(t)\right]=0\ ;\ \forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau)$$

Luego

$$\rho_1^{\pm}(t)=0\ ;\ \forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau)$$

Tomando $s=1$ en (22) obtenemos

$$0=\left[\frac{d\chi(t)}{dt}-F_0(t)\right]\rho_2^{\pm}(t)\ ;\ \forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau)$$

Luego

$$\rho_2^{\pm}(t)=0\ ;\ \forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau)$$

Continuando así vemos que:

$$\rho_s^{\pm}(t)=0\ ;\forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau);\ s=0,1,\cdots,+\infty$$

O bien:

$$\rho_s^{+}(t)=\rho_s^{-}(t)\ ;\forall\, t\in(t_0-\tau,t_0+\tau);\ s=0,1,\cdots,+\infty$$

En particular $\rho_s^{+}(t_0)=\rho_s^{-}(t_0)$ ($s=0,1,\cdots,+\infty$). De donde, por (5) y (7):

$$\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t_0,\chi(t_0)+0)=\frac{\partial^s\rho}{\partial x^s}(t_0,\chi(t_0)-0)$$

para $s=0,\cdots,+\infty$. Hemos llegado a una contradicción pues entonces el perfil $\rho(t_0,x)$ no posee orden de ruptura finito en el punto singular $x=\chi(t_0)$. Esto demuestra que:

$$\dot{\chi}(t)-F_0(t)\equiv 0\ \ (t\in I) \tag{24}$$

Sustituyendo (19) y recordando (9) y (10), las condiciones de Maslov quedan en forma standard ($t\in I$):

$$\dot{\chi}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i} \tag{25}$$

$$\frac{d\rho_s^{+}(t)}{dt}=(s+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\times \times\left\{\rho_{s+1}^{+}(t)\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i} -\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^{+}(t)\cdots\rho_{m_n}^{+}(t)\right\} \tag{26}$$

$$\frac{d\rho_s^{-}(t)}{dt}=(s+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}\times \times\left\{\rho_{s+1}^{-}(t)\sum_{i=0}^{n-1}[\rho_0^{+}(t)]^{n-1-i}[\rho_0^{-}(t)]^{i} -\sum_{|m|=s+1}\rho_{m_1}^{-}(t)\cdots\rho_{m_n}^{-}(t)\right\} \tag{27}$$

**CONCLUSIÓN III:** Las condiciones de cadena de Maslov -para el caso de ondas cinemáticas regulares a piezas, cualquiera sea el intervalo temporal estructurado que se elija, y cualquiera sea –dentro del mismo- la trayectoria singular $x = \chi(t)$ que se considere - se pueden escribir en la forma standard (25), (26) y (27).

## 6 Conclusiones

Las ondas cinemáticas suaves por piezas[1] -como soluciones generalizadas de leyes de conservación escalares- pueden estudiarse conjugando el método clásico de las características y las condiciones de salto de Hugoniot[1, 2]. Para el caso de las ondas de choque también se ha aplicado el método de cadenas de Maslov, que resulta muy llamativo por su potencia para encarar problemas de mayor complejidad analítica[3, 6, 7]. La finalidad de nuestro trabajo consiste en extender la aplicabilidad del método de las cadenas al estudio de ondas cinemáticas regulares por piezas en general.

El método que estudiamos se apoya en una hipótesis de trabajo natural: dadas dos piezas suaves de la solución física (separadas entre si por una trayectoria singular) se supone que cada una de ellas puede prolongarse (hacia la otra parte de tal curva) mediante un desarrollo en serie de potencias centrado en la misma.

Por su parte, las condiciones de cadena no son más que la expresión –en términos de los coeficientes de las series- de la ley de conservación en forma diferencial -a cada lado de la trayectoria singular, donde el desarrollo en serie de la correspondiente pieza suave tiene sentido físico - y la condición de Hugoniot. De forma directa, las cadenas de Maslov aparecen en forma estándar tan solo para ondas de choque; en el caso de rupturas de orden positivo la condición de Hugoniot se nos presenta indeterminada.

Para cumplir nuestro propósito, hemos considerado la diferencia (función salto) entre las piezas de la solución física -matemáticamente prolongadas- notando que se trata de una función suave que admite igualmente ser desarrollada en tal tipo de serie. Así, conjuntamente con las condiciones de cadena, hemos hallado relaciones recursivas que involucran a los coeficientes de la función salto. Debe observarse que para lograr tales relaciones recursivas se necesita usar no solo la condición de Hugoniot, sino también las leyes de conservación en forma diferencial y las prolongaciones de las piezas suaves mediante desarrollos en serie. A su vez, tales relaciones recursivas son las que nos ayudan a (mediante un razonamiento recursivo y por reducción al absurdo) "resolver la indeterminación"que presenta la condición de cadena de Hugoniot en el caso de rupturas de orden no nulo (finito) y expresar en forma standard las condiciones de cadena con toda generalidad.

El resultado alcanzado no es más que el primer paso para poder aplicar el método de Maslov al estudio de las ondas cinemáticas suaves por piezas. Es natural no obstante esperar que, la forma standard general que hemos hallado para las condiciones de cadena, nos facilite tanto su estudio analítico como su aplicación numérica mediante el truncamiento de las cadenas y las series[6, 7].

La hipótesis de trabajo sobre la prolongación de las piezas suaves, solo puede justificarse una vez que se haya resuelto un problema concreto en detalles. La misma es característica del método y –según la experiencia del autor- está presente también (aunque algo más "oculta"en el formalismo matemático) cuando estos problemas se encaran con el auxilio de las funciones generalizadas[5]. De hecho, utilizamos el término de "solución regular por piezas" para referirnos a las soluciones suaves por piezas que se avienen a tal hipótesis.

## Referencias


1. J. R. Talavera, Ondas cinemáticas suaves por piezas: condiciones de Hugoniot (Rev. Cubana de Física, 2007)

2. G. B. Whitham, Linear and Non linear Waves (John Wiley & Sons, 1974).

3. V. P. Maslov, Propagation of a shock wave in a non viscous isentropic gas (VINITI, 199-271, 1977).

4. Yu. V. Egorov, A contribution to the theory of generalized functions (Russian Math Surveys, 1-49, 1990).

5. A. E. Taylor, W.R. Mann, Advanced Calculus (Xerox, 1972).

6. V. G. Danilov, G. A. Omelyanov, Truncation of a chain Hugoniot – type conditions and its justification for the Hopf equation (Preprint ESI 502, Vienna, E. Schrödinger Inst. for Math Phys, 1997)

7. R. Ravindran, P. Prasad, A New Theory of Shock Dynamics I and II (Applied Math Letters, Vol. 3, 1990).