Rev. Cub. Física vol.24 No. 2 (2007) p.154-160
ISSN: 0253-9268. Original paper

Revista Cubana de Física

Calle I No. 302 e/ 15 y 17
Vedado, La Habana.
www.fisica.uh.cu/biblioteca/revcubfi/index.htm

Ondas cinemáticas suaves por piezas: condiciones de Hugoniot

José R. Talavera Hurtado

Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, Cuba; talavera@matcom.uh.cu

Recibido el 1/06/07. Aprobado en versión final el 15/1/08.

Sumario. Se considera el problema de la propagación unidimensional de cierto tipo de "material"conservativo. Realizando un balance de material obtenemos la formulación integral de la ley de conservación. Para las regiones donde la densidad y el flujo son suaves se demuestra la equivalencia de la ecuación de continuidad y la ley de conservación integral. Las ondas cinemáticas se caracterizan por ser el flujo una función dada de la densidad; en este caso la ecuación de continuidad toma la forma de una ley de conservación (diferencial). Se analizan en detalle las peculiaridades de las líneas características. Se explica el concepto de solución generalizada clásica. Se proponen algunas definiciones: perfiles regulares a trozos, puntos singulares, orden de la ruptura de un perfil dado en un punto singular del mismo, trayectorias singulares, intervalos temporales estructurados, regiones de suavidad superior e inferior asociadas a una trayectoria singular en un intervalo estructurado, y soluciones suaves por piezas. Usando la formulación integral de la ley de conservación, se presenta una demostración rigurosa de las condiciones de salto de Hugoniot. Para flujos cuadráticos y cúbicos, se dilucida la posibilidad de que aparezcan ondas de choque, partiendo de condiciones iniciales suaves.

Abstract. The problem of one-dimensional propagation of some kind of conservative "material" is considered. By making a material balance, the integral formulation of the conservation law is obtained. For regions where the density and the flux are smooth, the equivalence between the continuity equation and the integral form of the conservation law is proved. Kinematics waves are characterized by the fact that the flux is a known function of the density; in this case the continuity equation takes the form of a (differential) conservation law. The particularities of the characteristics lines are analyzed in details. The classical concept of generalized solution is explained. Some new definitions are proposed: regular by sections profiles, singular points, the rupture order associated to a singular point in a given profile, singular paths, structured time intervals, higher and lower –for a singular path along a structured time interval- regions of smoothness, and smooth by pieces solutions . As a consequence of the integral formulation of the conservation law, a rigorous proof of the Hugoniot jump conditions is provided. For quadratic and cubic fluxes, the formation of shock waves (starting with smooth initial conditions) is elucidated.

Palabras clave. Leyes de conservación dinámica fluidos 47.10.ab, Kinematics deformation (rheology) 83.10.Bb, Optical Ray Tracing 42.15.Dp, Distribution theory 02.50.Ng.

1 Introducción

Como punto de partida, en el presente trabajo se considera un modelo físico muy sencillo: la propagación unidimensional de un "material"cuya distribución espacial evoluciona con el tiempo, en ausencia de fuentes o sumideros para el mismo ("material" conservativo). Este modelo es de muy fácil visualización y, simultáneamente, puede traducirse a situaciones muy diversas que guardan una completa analogía físico-matemática con el mismo.

Al efectuar el balance[1] de dicho material, para cierto segmento del eje espacial considerado, y cierto lapso temporal, obtenemos una relación integral que expresa justamente la ausencia de fuentes o sumideros para tal material, es decir, la forma integral de la ley de conservación. Por razones estéticas y de comodidad matemática, la relación integral obtenida la expresamos, en forma equivalente, como la anulación de cierta integral curvilínea, que involucra a la densidad y al flujo, sobre toda trayectoria rectangular del plano (t,x) con lados paralelos a tales ejes. En todo caso, hay un concepto que debe subrayarse: la ley de conservación física se formula matemáticamente por medio de una relación integral.

Para las regiones del plano (t,x) donde la densidad ρ y el flujo ϕ sean funciones suaves de dichas variables, la ley de conservación puede escribirse, en forma equivalente mediante una relación diferencial: la ecuación de continuidad. Ella involucra dos funciones que son, en principio, incógnitas: la densidad y el flujo.

Esta situación nos recuerda a la mecánica y la electrodinámica de los medios continuos; en ambos casos las ecuaciones diferenciales fundamentales deben ser complementadas o "cerradas" con relaciones adicionales que concreten la situación física: ecuaciones de estado, leyes constitutivas, etc.

Regresando a nuestra ecuación de continuidad escalar, supongamos que el "material que se conserva" es la energía calorífica. En este caso podemos emplear como información adicional, por ejemplo, la ley fundamental de la calorimetría y la ley de Fourier. De proceder así, dicha ecuación de continuidad deviene en la ecuación clásica de propagación del calor.

Pero nuestro propósito actual se centra en las llamadas ondas cinemáticas. Estas se caracterizan por ser el flujo una función conocida y suave de la densidad. En consecuencia, la ecuación de continuidad deviene en una EDP de primer orden cuasilineal y homogénea (no sin cierto abuso de lenguaje, se le llama ley de conservación) susceptible de ser estudiada, por ejemplo, mediante el método de las características[2]. No obstante, en muchos casos de interés -quisiéramos decir en los de mayor interés- la solución no puede ser completada tan solo con la ayuda de las características.

Esto se debe a la existencia de ondas cinemáticas con perfiles no suaves e incluso discontinuos[1]: ondas de choque, ondas de rarefacción o de compresión, ondas tipo N, etc. En estos casos hay que apelar necesariamente a la información adicional que nos brinda el principio de conservación en forma integral.

Por tanto, el estudio de las ondas cinemáticas no se reduce tan solo a buscar soluciones clásicas de EDP, sino a encontrar lo que suelen llamarse soluciones generalizadas (en el sentido clásico o si se prefiere físico) de las mismas. En cuanto a la información adicional que extraemos de la forma integral de la ley de conservación, el punto más importante es, con mucho, la llamada condición de Hugoniot[1].

En lo esencial, la condición de Hugoniot juega el papel de facilitar el "empalme con sentido físico" de las distintas "piezas suaves" que componen la solución. En el plano (t,x) aparecen como regla curvas o puntos en los que se pierde la suavidad pero que delimitan regiones donde hay soluciones suaves clásicas; la condición de Hugoniot suele permitirnos, por ejemplo, conocer el salto en los valores de la densidad justo al cruzar una de tales fronteras y así, continuar la solución hacia la otra región, construyendo el nuevo sistema de características.

Una vez analizadas las particularidades de las características para las EDP tipo ley de conservación escalar; conviene introducir una terminología apropiada para describir con mayor claridad los problemas globales asociados al estudio de las ondas cinemáticas. Para ello, damos las definiciones de: soluciones generalizadas clásicas, perfiles regulares (suaves) a trozos, puntos singulares, orden de ruptura de un perfil en un punto singular del mismo, trayectorias singulares (o sea, de los puntos singulares), intervalos temporales estructurados, regiones de suavidad por encima y por debajo de una trayectoria singular a lo largo de un intervalo temporal estructurado y, soluciones suaves por piezas. La utilidad de estas definiciones va bastante más allá de los límites del presente artículo.

Seguidamente, ofrecemos una demostración de corte clásico (parte de la forma integral de la ley de conservación) de las condiciones de Hugoniot, en forma exhaustiva y rigurosa (desafortunadamente, la demostración usual[1] no es completamente satisfactoria).

Este acento en el rigor matemático es de particular importancia en el presente pues, con la aparición de las teorías no lineales de funciones generalizadas[3,4], se aplican nuevos conceptos (muy naturales) sobre soluciones generalizadas débiles, a partir de los cuales también se puede llegar a la condición de Hugoniot (siguiendo esta línea de pensamiento, el autor ha logrado dos demostraciones independientes de la condición de Hugoniot). Las teorías no lineales de funciones generalizadas tienen un carácter (moderadamente) abstracto y, por ello, las demostraciones en este contexto quedan forzadas a encontrar su apoyo en la pureza lógica.

Ahora, nuestro propósito es unificador. Desde el punto de vista físico[1] el orden correcto es justamente el que seguimos en el presente artículo: a partir del principio de conservación, y mediante el balance de "material", se obtiene la expresión integral de la ley de conservación, y de aquí como corolarios siguen (de modo riguroso) tanto la ecuación de continuidad (EDP tipo ley de conservación) como la condición de Hugoniot. Desde el punto de vista de la teoría de funciones generalizadas se parte de la EDP (tipo ley de conservación) y, a través del concepto natural de solución débil, se llega igualmente a la condición de Hugoniot. Esto último es un éxito de la teoría más moderna, pero para nada un fracaso del punto de vista físico-matemático clásico. Simplemente, con la teoría no lineal de funciones generalizadas se llega al resultado correcto aunque por otro camino, algo más abstracto pero también natural.

Finalmente, pasamos a aclarar un punto de la literatura que llama la atención. Una de las cualidades más llamativas de las EDP no lineales, particularmente las del tipo ley de conservación, es la posibilidad de que aparezcan soluciones discontinuas de tipo onda de choque, partiendo de datos iniciales suaves. En la literatura esto se ejemplifica para flujos cúbicos[2] pero no para flujos cuadráticos; en la última sección explicamos el porque y el como.

2 Formulación integral de las leyes de conservación

Consideremos, a título de ejemplo, un material cuya distribución espacial evoluciona con el tiempo. Supondremos que no existen fuentes o sumideros para dicho material. Nos limitaremos al caso unidimensional, de forma que las magnitudes relevantes para describir el proceso sean, para cada instante de tiempo fijo, funciones de una sola variable espacial (eje x).

Sea $\rho = \rho(t,x)$ la densidad por unidad de longitud y $\phi = \phi(t,x)$ el flujo por unidad de tiempo. Realizando el balance de material en el intervalo $[x_1, x_2]$ entre los instantes t_1 y t_2, obtenemos la condición:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2,x)dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(t_1,x)dx = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t,x_1)dt - \int_{t_1}^{t_2} \phi(t,x_2)dt$$

que es válida cualesquiera sean x_1, x_2, t_1 y t_2. Es fácil comprobar que tal condición se puede escribir en la forma equivalente:

$$\oint_{\partial R} \phi(t,x)dt - \rho(t,x)dx = 0 \qquad (1)$$

válida para toda región rectangular $R = [t_1,t_2] \times [x_1,x_2]$.

La condición (1) expresa, en forma integral, la ley de conservación (ausencia de fuentes o sumideros para el material considerado).

3 Ecuación de continuidad

Supongamos que las funciones $\rho = \rho(t,x)$ y $\phi = \phi(t,x)$ son suaves en cierta región S del plano (t,x). Partiendo de (1) y aplicando el teorema de Green, obtenemos directamente que:

$$\iint_{R_S} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dtdx = 0 \qquad (2)$$

para toda región rectangular R_S contenida, conjuntamente con su frontera, en el interior de la región S.

Pero entonces, el integrando de (2) tiene que anularse idénticamente en el interior de S. En efecto, si el integrando no fuese nulo en algún punto interior a S, bastaría construir un rectángulo con centro en tal punto y de lados suficientemente pequeños (de forma que el signo del integrando no varíe en el interior del rectángulo y que la clausura de tal región rectangular sea interior a S) para obtener una contradicción con (2). En conclusión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{en el interior de } S) \qquad (3)$$

La ecuación (3) es conocida, particularmente en los textos de física, como ecuación de continuidad.

En las regiones donde la densidad y el flujo sean funciones suaves se puede demostrar el recíproco: partiendo de la ecuación de continuidad (3) y aplicando el teorema de Green, se llega a la ley de conservación en forma integral (1). Por ello, la ecuación de continuidad es la forma diferencial de la ley de conservación, válida para las regiones donde ρ y ϕ sean suaves.

En diversos problemas de interés ocurre en cambio que la densidad o el flujo no son suaves (incluso pueden ser discontinuos) en determinados arcos o puntos del plano (t,x). En tal caso la información que nos aporta (3) hay que complementarla con información adicional proveniente de (1). Pero en primer lugar, notemos que la ecuación de continuidad (3) es una relación diferencial donde aparecen dos funciones, la densidad y el flujo, que son, en general, incógnitas; por ello lo más urgente es "cerrar" el problema.

4 Ondas cinemáticas

Las ondas cinemáticas se caracterizan por ser el flujo una función conocida (suave) de la densidad:

$$\phi(t,x) = \Phi[\rho(t,x)] \qquad (4)$$

En tal caso la ecuación de continuidad (3) toma el aspecto (ley de conservación en forma diferencial):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho) = 0 \qquad (5)$$

o bien, equivalentemente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Phi'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

y, por su parte, la ley de conservación en forma integral (1) queda:

$$\oint_{\partial R} \Phi[\rho(t,x)]dt - \rho(t,x)dx = 0 \qquad (7)$$

5 Método de las características

Obsérvese que (6) es una EDP de primer orden cuasi lineal y homogénea. Por ello, en las regiones donde la densidad varía suavemente, resulta apropiado usar el método de las características. Las curvas características en el plano (t,x) satisfacen el sistema de EDO[2]:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\Phi'(\rho)} = d\tau \qquad (8)$$

y, sobre cada curva característica $\rho \equiv cte$, debido a que la EDP (6) es homogénea. De aquí sigue en forma inmediata que la característica que pasa por el punto (t_0, x_0) es simplemente la recta con pendiente $\Phi'(\rho(t_0,x_0))$, es decir, la recta:

$$x - x_0 = (t - t_0)\Phi'[\rho(t_0,x_0)] \qquad (9)$$

y que, a lo largo de ella, la densidad tiene el valor constante:

$$\rho(t,x) \equiv \rho(t_0,x_0) \qquad (10)$$

Esta conclusión nos facilita resolver los problemas de Cauchy, asociados a la EDP (6).

Partiendo, por ejemplo, de una condición inicial dada:

$$\rho(t_0, x) = \rho_0(x) \tag{11}$$

vemos que las características son las rectas:

$$x = s + (t - t_0)\Phi'[\rho_0(s)] \tag{12}$$

donde el parámetro s es el valor de x en el punto donde la característica corta a la recta $t = t_0$; como sabemos, en todo punto de una misma recta característica de la familia (12) la densidad se mantiene constante:

$$\rho(t, x) \equiv \rho_0(s) \tag{13}$$

En otras ocasiones aparecen problemas donde los valores de ρ se conocen sobre una cierta curva Γ del plano (t, x) que se expresa en forma paramétrica:

$$t = t_\Gamma(s)\ ;\ x = x_\Gamma(s) \tag{14}$$

donde el parámetro s varía en cierto rango, usualmente un intervalo, dado. En este caso se construyen las características que pasan por cada punto de Γ, es decir la familia de rectas:

$$x - x_\Gamma(s) = (t - t_\Gamma(s))\Phi'[\rho(t_\Gamma(s), x_\Gamma(s))] \tag{15}$$

sobre cada una de las cuales:

$$\rho(t, x) \equiv \rho(t_\Gamma(s), x_\Gamma(s)) \tag{16}$$

lo que permite hallar $\rho(t, x)$ en cierta región del plano (t, x).

No obstante, pueden presentarse dificultades que impidan construir por esta vía la solución para todo el plano (t, x), o bien, en toda la zona que nos interese. Las características pueden, por ejemplo, poseer una envolvente a un lado de la cual las conclusiones que se derivan de (9) y (10) – es decir, (12) y (13), o bien, (15) y (16) - no ofrezcan información sobre los valores de $\rho(t, x)$. También pueden aparecer regiones tales que, por cada uno de sus puntos pase más de una característica, lo que puede dar lugar a una solución multievaluada, físicamente sin sentido. Para el caso de datos iniciales discontinuos, pueden aparecer regiones por las que no pasen rectas características que puedan derivarse de los datos del problema de Cauchy, incluso en ausencia de envolventes.

Con todo, el método de las características es una herramienta que suele ser útil, sobre todo cuando se complementa adecuadamente con la información adicional que proporciona (como veremos después) la forma integral (7) de la ley de conservación.

6 Ondas cinemáticas suaves por piezas: terminología descriptiva

Resulta necesario, o al menos cómodo, emplear algunos términos o definiciones para facilitar la conceptuación y la visión geométrica de los distintos problemas que aparecen al estudiar las ondas cinemáticas. En particular, esta terminología se aplicará en la demostración de la condición de Hugoniot, que daremos en la sección siguiente.

En muchos casos de gran interés práctico son objeto de estudio ondas cinemáticas cuyos perfiles no son suaves: ondas de choque, ondas de rarefacción, ondas tipo N, etc. Como en estos casos, u otros similares, la función $\rho = \rho(t, x)$ no resulta suave en todo su dominio y por ello se hace imposible estudiarla tan solo con la ayuda de la ecuación de continuidad (6); necesitaremos emplear, adicionalmente, conclusiones que se derivan de la ley de conservación en su forma integral (7). Las soluciones así obtenidas suelen denominarse **soluciones generalizadas, en el sentido clásico**, de la ecuación (6). Con mayor generalidad, la función $\rho = \rho(t, x)$ se dice que es solución generalizada en sentido clásico de la ecuación (6), en cierta región del plano (t, x), si ella satisface la condición integral (7) para toda región rectangular cuya clausura este contenida en el interior de la región de nuestro interés.

Diremos que el perfil de ondas $\rho = \rho(t_1, x)$ es **regular a trozos** cuando se satisfagan las condiciones siguientes. En primer lugar, $\rho = \rho(t_1, x)$ es una función infinitamente suave de la variable x, para todo $x \in \mathbb{R}$, con la posible excepción de un conjunto de puntos <u>aislados</u> en el eje x, a los que nos referiremos como **puntos singulares** del perfil en cuestión. En segundo lugar, en cada punto singular del perfil ($x = x_0$ digamos) tienen que <u>existir</u> y ser <u>finitos</u> todos los límites laterales:

$$\lim_{\delta x \to 0^+} \frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x_0 + \delta x) \equiv \frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x_0 + 0)$$

$$\lim_{\delta x \to 0^-} \frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x_0 + \delta x) \equiv \frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x_0 - 0)$$

para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \cdots, +\infty\}$. Y si, en tercer lugar y finalmente, en cada punto singular del perfil ($x = x_0$ digamos) existe un **orden de ruptura** finito, entendiéndose como tal al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x)$ presente una discontinuidad de salto finito para $x = x_0$:

$$\frac{\partial^m \rho}{\partial x^m}(t_1, x_0 - 0) = \frac{\partial^m \rho}{\partial x^m}(t_1, x_0 + 0) \quad (m = 0, \cdots, n-1)$$

$$\frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x_0 - 0) \neq \frac{\partial^n \rho}{\partial x^n}(t_1, x_0 + 0)$$

Así, una onda de choque posee (en cada perfil) un único punto singular con orden de ruptura cero. Una onda tipo N posee (en cada perfil) dos puntos singulares, ambos con orden de ruptura cero. Las ondas de rarefacción exhiben (en cada perfil) dos puntos singulares, ambos con orden de ruptura uno.

Al transcurrir el tiempo, los perfiles varían su aspecto continuamente y los puntos singulares se van desplazando por el eje x. La curva $x = \chi(t)$ que describe un punto singular en el plano (t, x) la llamaremos **trayectoria de la singularidad** o también **trayectoria singular**.

Un intervalo abierto I del eje t, se dirá que es un **intervalo temporal estructurado** cuando se satisfagan las condiciones siguientes. En primer lugar, para todo $t_1 \in I$ el perfil $\rho = \rho(t_1, x)$ es regular a trozos. En segundo lugar, si $t_1 \in I$ y $x_1 = \chi(t_1)$ es (algún) punto singular del perfil $\rho = \rho(t_1, x)$, entonces, la trayectoria singular correspondiente ($x = \chi(t)$ digamos) está definida y es una función suave para todo $t \in I$. En tercer lugar, dos trayectorias singulares distintas no poseen ningún punto común para $t \in I$. En cuarto lugar y finalmente, en cada una de las regiones abiertas, comprendidas en la banda $I \times \mathbb{R}_x$ por las que no pasen trayectorias singulares, la función $\rho = \rho(t, x)$ es suave.

Sea I un intervalo temporal estructurado y sea $x = \chi(t)$ la trayectoria de una singularidad ($t \in I$). Llamaremos **región de suavidad superior** S_χ^+ a la subregión maximal de $\{x > \chi(t)\,; t \in I\}$ donde $\rho(t, x)$ sea suave. Llamaremos **región de suavidad inferior** S_χ^- a la subregión maximal de $\{x < \chi(t)\,; t \in I\}$ donde $\rho(t, x)$ sea suave. Denotaremos por $\rho^+(t, x)$ y $\rho^-(t, x)$ a las restricciones de $\rho(t, x)$ a S_χ^+ y S_χ^- respectivamente; prolongadas de forma continua y suave desde adentro [5], hasta la curva $x = \chi(t)$. Entonces:

$$\frac{\partial \rho^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^+) = 0; \quad (t, x) \in S_\chi^+ \tag{17}$$

$$\frac{\partial \rho^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^-) = 0\,; \quad (t, x) \in S_\chi^- \tag{18}$$

Diremos que una onda cinemática es **suave por piezas** cuando, en primer lugar, el eje temporal "t" -o bien, la parte del mismo que nos interese para nuestro estudio, usualmente un intervalo- pueda particionarse en (un conjunto de) intervalos temporales estructurados (disjuntos y rampantes). En segundo lugar pedimos que, si t_1 limita a dos de tales intervalos temporales estructurados -uno a la izquierda y otro a la derecha- o bien, si en $t = t_1$ se da la condición inicial; entonces el perfil $\rho = \rho(t_1, x)$ sea regular a trozos.

La técnica general de estudio de las ondas cinemáticas suaves por piezas, incluye el arte de realizar la partición del eje temporal en intervalos temporales estructurados (maximales), dividiendo así el problema total en un conjunto de problemas más sencillos.

7 Condiciones de Hugoniot

Sea I un intervalo temporal estructurado. Sea $x = \chi(t)$ la trayectoria de una singularidad ($t \in I$). Elijamos un cierto instante (cualquiera) $t_1 \in I$.

El perfil de onda $\rho = \rho(t_1, x)$ es regular a trozos por lo que el punto singular $\chi(t_1)$ estará aislado en dicho perfil. Por ello, existe cierto $\delta > 0$ tal que el perfil $\rho = \rho(t_1, x)$ no presenta ningún otro punto singular para $|x - \chi(t_1)| \le \delta$.

Como las trayectorias singulares son todas suaves para $t \in I$, podemos afirmar que (como consecuencia de la conservación local del signo para las funciones continuas) existe un $\varepsilon > 0$ tal que, por la región rectangular $R = [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \times [\chi(t_1) - \delta, \chi(t_1) + \delta]$ no pasa ninguna otra trayectoria singular - salvo la que hemos considerado $x = \chi(t)$ - y que $|\chi(t_1 \pm \varepsilon) - \chi(t_1)| < \delta$.

En la frontera de la región rectangular cerrada R tenemos seis puntos que queremos destacar:

$$A\left(t_1 - \varepsilon, \chi(t_1 - \varepsilon)\right)\,;\, B\left(t_1 - \varepsilon, \chi(t_1) - \delta\right);$$
$$C\left(t_1 + \varepsilon, \chi(t_1) - \delta\right); D\left(t_1 + \varepsilon, \chi(t_1 + \varepsilon)\right);$$
$$E\left(t_1 + \varepsilon, \chi(t_1) + \delta\right) \text{ y } F\left(t_1 - \varepsilon, \chi(t_1) + \delta\right)$$

Llamaremos R^+ y R^- a las partes cerradas de R que se ubican, respectivamente, por encima y por debajo de la curva $x = \chi(t)$, en el plano (t, x).

Aplicando el teorema de Green[5] en la región cerrada R^+ y teniendo en cuenta (17):

$$\oint_{ADEFA} \Phi(\rho^+)dt - \rho^+ dx = -\iint_{R^+}\left(\frac{\partial \rho^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^+)\right)dtdx = 0$$

Similarmente, aplicando el teorema de Green[5] en la región cerrada R^- y teniendo en cuenta (18):

$$\oint_{ABCDA} \Phi(\rho^-)dt - \rho^- dx = -\iint_{R^-}\left(\frac{\partial \rho^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\rho^-)\right)dtdx = 0$$

Por tanto, la suma de las integrales curvilíneas se anula:

$$\oint_{ADEFA} \Phi(\rho^+)dt - \rho^+ dx + \oint_{ABCDA} \Phi(\rho^-)dt - \rho^- dx = 0$$

Teniendo en cuenta las definiciones de $\rho^+(t, x)$ y $\rho^-(t, x)$, obtenemos, recordando (7), que:

$$\int_A^D \left[\Phi(\rho^+) - \Phi(\rho^-)\right]dt - \left[\rho^+ - \rho^-\right]dx = 0$$

Usando $x = \chi(t)$ como parametrización del arco AD:

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \{\, \Phi[\rho^+(t, \chi(t))] - \Phi[\rho^-(t, \chi(t))]$$
$$- \left[\rho^+(t, \chi(t)) - \rho^-(t, \chi(t))\right] \dot{\chi}(t)\ \}dt = 0$$

Como el integrando es continuo y $\varepsilon > 0$ es tan pequeño como se quiera, podemos proceder como sigue. Primeramente aplicamos el teorema del valor medio, a continuación dividimos ambos miembros entre $2\varepsilon > 0$, y finalmente, pasamos al límite cuando $\varepsilon \to 0^+$. Con esto:

$$\left[\rho^+(t_1, \chi(t_1)) - \rho^-(t_1, \chi(t_1))\right] \dot{\chi}(t_1) =$$
$$= \Phi[\rho^+(t_1, \chi(t_1))] - \Phi[\rho^-(t_1, \chi(t_1))]$$

Como t_1 es un punto arbitrario del intervalo I, concluimos que, para todo $t \in I$ se cumple la **Condición de Hugoniot**:

$$\left[\rho^+(t,\chi(t)) - \rho^-(t,\chi(t))\right] \dot{\chi}(t) =$$
$$= \Phi[\rho^+(t,\chi(t))] - \Phi[\rho^-(t,\chi(t))] \qquad (19)$$

En **conclusión**: siempre que I sea un intervalo temporal estructurado y $x = \chi(t)$ ($t \in I$) sea la trayectoria de una singularidad, la condición de Hugoniot (19) se cumplirá $\forall t \in I$.

8 Formación de choques a partir de condiciones iniciales suaves

En la literatura[1] existe una considerable cantidad de ejemplos (relativamente sencillos) que están resueltos e ilustran muy diversas situaciones y técnicas de trabajo (sobre todo de carácter geométrico). Por otra parte, suele reconocerse que construir problemas es al menos tan importante como resolverlos.

Un fenómeno típico y muy llamativo de las EDP no lineales, en particular las del tipo ley de conservación, es la aparición de soluciones discontinuas, de tipo onda de choque por ejemplo, a partir de condiciones iniciales suaves.

Para las ondas cinemáticas esto puede ocurrir cuando la familia de rectas características, construida a partir de las condiciones iniciales - ver (12) y (13) - posee una envolvente. En este caso, los datos iniciales nos dan la solución directamente tan solo hacia la parte de la envolvente en que se encuentran las características. Posteriormente, haciendo uso de la condición de Hugoniot, existe la posibilidad de calcular los valores a los que se acerca la función incógnita ρ cuando nos acercamos a la envolvente por la otra parte de la misma. Con estos valores podemos aplicar nuevamente el método de las características - ver (15) y (16) - para completar la solución del problema.

Si se pretende ilustrar lo anterior con ejemplos concretos, es natural el intentarlo con flujos lo más sencillos posibles: polinomios de segundo o tercer grado de la variable ρ (los de primer grado dan lugar a EDP lineales). Al revisar la literatura llama la atención que las ilustraciones se hacen tan solo con polinomios de tercer grado. Analicemos el porque.

Supongamos que $x = \xi(t)$ es envolvente de las características que se construyen partiendo de las condiciones iniciales suaves. Para fijar ideas supongamos que dicha envolvente es cóncava hacia abajo ($\ddot{\xi}(t) < 0$, por ejemplo). En este caso los valores de $\rho^+(t,x)$ - esto es los valores de $\rho(t,x)$ para $x \geq \xi(t)$ - pueden calcularse directamente de las condiciones iniciales usando la citada familia de características.

Consideremos un punto $(\tau, \xi(\tau))$ de la envolvente. La característica que pasa por dicho punto es tangente, en tal punto, a la envolvente $x = \xi(t)$. Por tanto $\dot{\xi}(\tau) = \Phi'[\rho^+(\tau,\xi(\tau))]$. Aplicando la condición de Hugoniot en el punto analizado de la envolvente:

$$\left(\rho^+ - \rho^-\right)\Phi'(\rho^+) = \Phi(\rho^+) - \Phi(\rho^-)$$

Para flujos del tipo:

$$\Phi(\rho) = \alpha\rho^3 + \beta\rho^2 + \gamma\rho + \delta$$

la condición anterior queda:

$$(\rho^+ - \rho^-)[3\alpha(\rho^+)^2 + 2\beta\rho^+ + \gamma] =$$
$$= \alpha[(\rho^+)^3 - (\rho^-)^3] + \beta[(\rho^+)^2 - (\rho^-)^2] + \gamma(\rho^+ - \rho^-)$$

Pero $\rho^+ \neq \rho^-$ pues suponemos que la envolvente es el frente de una onda de choque. Luego, podemos dividir ambos miembros entre $\rho^+ - \rho^-$, con lo que, agrupando:

$$\alpha[(\rho^-)^2 + \rho^+\rho^- - 2(\rho^+)^2] + \beta(\rho^- - \rho^+) = 0 \qquad (20)$$

Suponiendo un flujo cuadrático, $\alpha = 0$ y la condición (20) nos da $\beta(\rho^- - \rho^+) = 0$; luego (ya que suponemos una onda de choque) resulta que $\beta = 0$ y el flujo sería lineal, en este caso es fácil ver que las características que parten de la condición inicial son rectas paralelas y no hay ni tan siquiera envolvente.

En conclusión, para que se de una onda de choque (a partir de datos iniciales suaves) el flujo tiene que ser de orden cúbico al menos.

Un caso sencillo se da cuando el flujo es cúbico sin término cuadrático ($\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$). La ecuación (20) tiene dos soluciones: $\rho^- = \rho^+$ y $\rho^- = -2\rho^+$; la primera no da lugar a una onda de choque, pero la segunda sí. Luego con flujos cúbicos (sin término cuadrático) se pueden formar ondas de choque partiendo de condiciones iniciales suaves. Es fácil construir ejemplos de este tipo. Escogemos $x = \xi(t)$ monótona creciente y cóncava hacia abajo. La familia de sus rectas tangentes es entonces $x - \xi(\tau) = \dot{\xi}(\tau)(t - \tau)$ y a lo largo de cada una de ellas (o sea para cada τ) $\rho \equiv \sqrt{\dot{\xi}(\tau)/3\alpha}$ (suponemos $\alpha > 0$ y $\beta = \gamma = 0$). La condición inicial -que necesitamos- es entonces $\rho(0, \xi(\tau) - \tau\dot{\xi}(\tau)) = \sqrt{\dot{\xi}(\tau)/3\alpha}$; que, de ser necesario, puede completarse suavemente al resto del eje x (de manera que las características por estos x "sobrantes" no corten a la envolvente). El estudio detallado de un ejemplo concreto[2] puede servir para redondear lo expuesto en esta sección.

Referencias

1. G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves (John Wiley & Sons, 1974).

2. A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva and A.G. Sveshnikov, Differential Equations (Springer, 1985).

3. Yu. V. Egorov. A contribution to the theory of generalized functions (Russian Math Surveys, 1990, 1-49).

4. M. Oberguggenberger, Multiplication of distributions and applications to partial differential equations (Innsbruck, 1991)

5. A. E. Taylor, W.R. Mann, Advanced Calculus (Xerox, 1972).