

Propiedades circulares, elípticas y parabólicas en el lanzamiento de proyectiles

J. L. Fernández Chapou^a, L. C. de la Portilla Maldonado^b, C. A. Vargas^c, J. Granados Samaniego[†] y J. M. Velázquez Arcos^d.

Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Azcapotzalco. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Departamento de Ciencias Básicas; a) jlfc@correo.azc.uam.mx; b) lcpm@correo.azc.uam.mx; c) cvargas@correo.azc.uam.mx; d) jmva@correo.azc.uam.mx; jgs3112@yahoo.com [†]

Recibido el 1/02/09. Aprobado en versión final el 13/06/2010.

Sumario. Al analizar la familia de las trayectorias parabólicas que siguen los proyectiles lanzados con distintos ángulos de tiro pero igual rapidez inicial, encontramos que existen tres miembros de las secciones cónicas que corresponden con dos propiedades circulares, una elíptica con dos significados físicos y otra parabólica. Obtenemos cada una de las secciones cónicas, discutimos su significado físico y propiedades universales en el problema de lanzamiento de proyectiles. Con una de las propiedades circulares presentamos un método para determinar la parábola de seguridad y la elipse que une las posiciones de altura máxima.

Abstract. By analyzing the parabolic trajectories that follows the missiles shuttled with different angles but same velocity, we find there are three groups of conical sections that bellows to a pair of circular properties, one elliptic with two physical meaning, and other parabolic. We obtain each one from the conical sections, discussing his physical meaning and universal properties. Using one of such properties we show a method to obtain the safety parabola and the ellipse that joint the maximum height positions.

Palabras clave. Physics education, 01.40.-d, teacher training, 01.40.J-.

1 Introducción

El problema del movimiento de proyectiles es parte de los cursos introductorios de la mecánica clásica. La física moderna comienza con las investigaciones de Galileo del movimiento de proyectiles en un medio sin resistencia. Ingeniosamente Galileo representa el movimiento en dos componentes, una en dirección vertical con aceleración uniforme (de acuerdo con su ley de la caída libre de los cuerpos) y la otra es el movimiento horizontal con velocidad constante. DE esta forma concluye que la trayectoria de los proyectiles es una parábola.

En este trabajo describimos propiedades interesantes que se encuentran cuando se analiza a la familia de trayectorias de proyectiles que son lanzados desde un mis-

mo punto con la misma velocidad inicial pero con diferentes ángulos de tiro respecto a la horizontal desde 0° hasta 180°. Mostramos que existen que existen propiedades parabólicas (aparte de la trayectoria parabólica), elípticas y circulares. Ilustramos de qué manera el estudiante puede “descubrir” y demostrar que la curva (elipse) que une los puntos donde la velocidad radial es cero coincide con la que une las posiciones de máxima altura. Con la propiedad circular damos un método alternativo para encontrar la parábola de seguridad y la elipse crítica.

2 Parábola de seguridad

Este es un problema antiguo que aún ha sido reconside-

rado por varios autores. Consiste en hallar la envolvente de la familia de todas las trayectorias correspondientes a proyectiles que son lanzados desde el origen de coordenadas en todas direcciones con la misma velocidad inicial.

Aquí indicaremos un método para obtenerla que es particularmente simple^{1,2,3}. Mas adelante vemos otro método usando una propiedad circular del tiro parabólico.

La ecuación de la trayectoria parabólica de un proyectil lanzado desde el origen con velocidad v_0 y ángulo de tiro α es:

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2) \quad (1)$$

con $u = \tan \alpha$.

La figura 1 muestra dos trayectorias de esta familia correspondientes a dos valores del parámetro u , junto con la porción derecha de la envolvente buscada.

Dado un punto de coordenadas (x, y) los valores de u para los cuales este es alcanzado son las raíces reales de la ecuación (1) que al describirse en la forma canónica: $au^2 + bu + c = 0$, es

$$u^2 - \frac{2v_0^2}{gx}u + \left(1 + \frac{2v_0^2y}{gx^2}\right) = 0 \quad (2)$$

dependiendo de los valores del discriminante $D = b^2 - 4ac$, la Ec. (2) puede:

- i) No tener soluciones reales si $D < 0$,
- ii) Tener dos soluciones reales si $D > 0$,
- iii) Tener una raíz real si $D = 0$.

Físicamente significa que un punto A para el que $D > 0$ puede ser alcanzado por dos ángulos de tiro distintos. Ningún punto B para el que $D < 0$ puede ser alcanzado por un proyectil lanzado con velocidad v_0 en cualquier dirección. El caso $D = 0$ corresponde al conjunto de puntos C que solo pueden ser alcanzados al lanzar el proyectil en una dirección. La condición $D = 0$ nos permite encontrar la envolvente buscada o línea de seguridad y que divide al plano en dos regiones: Una donde los puntos pueden ser alcanzados por dos proyectiles y la otra donde ningún punto puede ser alcanzado por algún proyectil.

De la relación

$$D = \left(\frac{2v_0^2}{gx}\right)^2 - 4\left(\frac{2v_0^2y}{gx^2}\right) = 0$$

se obtiene la ecuación de la envolvente:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \text{ que corresponde a una parábola.}$$

3 Elipse crítica

En el artículo [4] se demuestra que la curva que une las posiciones de los puntos de altura máxima de las trayectorias de los proyectiles lanzados desde el origen con velocidad v_0 en distintas direcciones corresponde a una elipse.

Para encontrar esta curva recordemos que las ecuaciones de las trayectorias de los proyectiles lanzados desde el origen con velocidad v_0 y ángulo de tiro α son

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

el tiempo t_m en alcanzar la altura máxima es $t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ (para el que $y' = 0$). Así entonces las coordenadas del proyectil al tiempo t_m son

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha, \quad y_m = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha \quad (4)$$

usando las identidades trigonométricas $2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$ y $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ las ecuaciones (4) se pueden describir como

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad y_m = \frac{v_0^2}{4g} (1 - \cos 2\alpha) \quad (5)$$

eliminando el ángulo α de las ecuaciones (5) obtenemos el lugar geométrico de los puntos de altura máxima

$$\frac{x_m^2}{a^2} + \frac{(y_m - b)^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

donde $a = \frac{v_0^2}{2g}$ y $b = \frac{v_0^2}{4g}$, esto es $a = 2b$. La Ec. (6) representa una elipse centrada en el punto $(0, b)$ con ejes menor y mayor dados por $2b$ y $2a$, respectivamente. La excentricidad es $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y no depende de ningún detalle del movimiento, en ese sentido, decimos que es universal.

Figura 1. Trayectorias de dos proyectiles lanzados desde el origen con velocidades iguales y el lado derecho de la parábola de seguridad. Los puntos A, B y C, corresponden a los casos $D < 0$, $D > 0$ y $D = 0$, respectivamente.

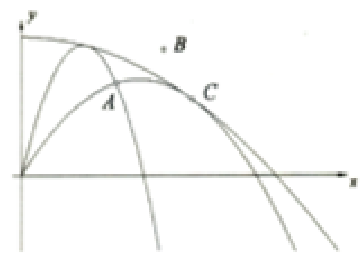
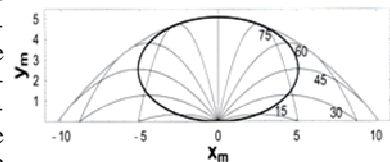


Figura 2. Trayectorias de varios proyectiles lanzados desde el origen con velocidades iguales a diferentes ángulos, elipse crítica y parábola de seguridad.



Como se observa en la figura (2), el vértice derecho de la elipse corresponde al caso de un proyectil con alcance máximo. Las coordenadas de estos puntos son $x_m = a$ y $y_m = b$. Como las trayectorias son simétricas con respecto a los puntos sobre la elipse el alcance de cualquier proyectil es

$$R = 2x_m = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}2\alpha \quad (7)$$

por lo tanto el alcance máximo esta dado por

$$R_{\max} = 2a = \frac{v_0^2}{g} \quad (8)$$

Para obtener el ángulo correspondiente a la trayectoria de alcance máximo, de acuerdo con (7) y (8): $\text{sen}(2\alpha_{\max}) = 1$, i.e. el máximo alcance se obtiene cuando $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}$. De esta forma hemos maximizado el alcance del proyectil sin usar el cálculo diferencial.

4 Elipse de retorno

Si nos preguntamos ¿Qué parte de la trayectoria del proyectil se aproxima o se aleja del punto de lanzamiento? Tendremos que calcular la velocidad radial

$\dot{r} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ y verificar en que parte $\dot{r} < 0$, $\dot{r} > 0$ o $\dot{r} = 0$. Lo mas natural es ver primero si es posible encontrar el lugar geométrico de todos los puntos (x,y) de la familia de trayectorias para los cuales $\dot{r} = 0$. Lo primero que podemos ver es que para los puntos de la elipse de coordenadas $(0,0)$ y $(0,2b)$, $\dot{r} = 0$. Esto lleva a sospechar que la elipse podría contener a todos los demás puntos para los cuales $\dot{r} = 0$. Para resolver este problema procedemos como sigue: usando las ecuaciones de la trayectoria, la velocidad radial \dot{r} se anula para los valores de t que son raíces de la ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dt} = r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = 0, \text{ que se reduce a}$$

$$2v_0^2 t - 3v_0 g t^2 \text{sen}\alpha + g^2 t^3 = 0.$$

La raíz cero (no-relevante) corresponde al punto de lanzamiento. Así \dot{r} se anula en los instantes

$$t_{\pm} = \frac{3v_0}{2g} \text{sen}\alpha \pm \frac{3v_0}{2g} \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \quad (9)$$

con $\alpha \in (0, 180^\circ)$. Los puntos $A_{\pm} = (x_{\pm}, y_{\pm})$ (ver figura) corresponden a estas dos raíces si, y solo si, ellas son reales. En ese caso la distancia radial $r(t)$ del proyectil, primero se incrementa para tiempos comprendidos entre el punto de lanzamiento y A_- . En el punto A_- la distancia $r(t)$ alcanza un máximo local, y entre A_- y A_+ la distancia radial $r(t)$ decrece con el tiempo hasta que el proyectil alcanza un mínimo local en A_+ . Finalmente, después de A_+ la distancia radial $r(t)$ se vuelve monótona creciente. Entonces entre A_- y A_+ el proyectil se está acercando al origen y únicamente lo hace así entre estos dos puntos. Los puntos $A_{\pm} = (x_{\pm}, y_{\pm})$ se calculan con (9) en (3)

$$x_{\pm} = \frac{3v_0^2}{2g} \cos\alpha \left(\text{sen}\alpha \pm \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \right)$$

$$y_{\pm} = -\frac{3v_0^2}{4g} \text{sen}\alpha \left(\text{sen}\alpha \pm \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \right) + \frac{v_0^2}{g}$$

En términos de de los semiejes de la elipse a y b estas se pueden describir de la forma

$$x_{\pm} = 2b \cos\alpha \left(\text{sen}\alpha \pm \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \right)$$

$$y_{\pm} = -b \text{sen}\alpha \left(\text{sen}\alpha \pm \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \right) + 4b \quad (10)$$

para que los puntos A_{\pm} existan se requiere que $\text{sen}\alpha > 8/9$. Nótese que los dos puntos A_{\pm} coinciden en $A_- = A_+ = A_c$ para el ángulo $\alpha_c = \arcsen(\sqrt{8}/3) \approx 70.53^\circ$. La figura (3) muestra tres trayectorias, una para $\alpha > 70.53^\circ$, otra para $\alpha < 70.53^\circ$ y la de $\alpha = 70.53^\circ$.

De las Ecs (10) obtenemos para $\alpha = 70.53^\circ$

$$A_c = \frac{4b}{3} (\sqrt{2}, 1).$$

Si sustituimos los valores de las coordenadas de A_c directamente en la ecuación de la elipse vemos que también este punto pertenece a ella.

La trayectoria del proyectil lanzado con el ángulo $\alpha = 70.53^\circ$ toca tangencialmente a la elipse en A_c .

Para encontrar el lugar geométrico de todos los puntos A_{\pm} de las trayectorias de los proyectiles lanzados con velocidad v_0 en todas las direcciones eliminamos α de las Ecs (10). Como se sospecha que seguramente ha de coincidir con la elipse crítica procedemos a eliminar α de la forma siguiente: Dividimos a x_{\pm} entre 2 y restamos b de y_{\pm} para obtener

$$\frac{x_{\pm}}{2} = 3b \cos\alpha \left(\text{sen}\alpha \pm \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \right),$$

$$y_{\pm} - b = 3b \left[1 - \text{sen}\alpha \left(\text{sen}\alpha \pm \sqrt{\text{sen}^2\alpha - \frac{8}{9}} \right) \right]$$

elevando al cuadrado estas últimas ecuaciones y sumando los resultados obtenemos después de algunos cálculos elementales que

$$\frac{(y_{\pm} - b)^2}{b^2} + \frac{x_{\pm}^2}{a^2} = 1$$

ésta es la misma elipse que une a los puntos de altura máxima. Los puntos de altura máxima y los puntos donde la velocidad radial es cero comparten el mismo lugar geométrico pero evidentemente no coinciden punto por punto a excepción de los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(0,2b)$.

Con estos resultados podemos ver que, de la misma forma que la parábola de seguridad divide al plano en dos regiones, una donde los puntos pueden ser alcanzados por dos proyectiles y otra donde los puntos no pueden ser alcanzados por ningún proyectil, la elipse también divide al plano en dos regiones. En todos los puntos

que se encuentran en los segmentos de trayectoria que estén fuera de la elipse el proyectil se aleja del punto de lanzamiento; mientras que en todos los puntos que se encuentren en la porción descendente de la trayectoria y que este dentro de la región encerrada por la elipse el proyectil se acerca hacia al punto de lanzamiento.

La figura 3 muestra un segmento de la elipse de retorno, tres segmentos de trayectorias de proyectiles y sus intersecciones con la elipse, para los tres casos: I): $\alpha = 75^\circ > \alpha_c$ con tres intersecciones, el punto de crítico M; A_+ y A_- . II): $\alpha = \alpha_c = \arcsen\sqrt{8/3} \approx 70.53^\circ$, mostrando la intersección con el punto de crítico M y las dos intersecciones coincidentes con el doble punto de contacto tangencial en A_c . III): $\alpha = 60^\circ < \alpha_c$, para el cual $r(t)$ siempre se incrementa, y la única intersección en el punto crítico M. Exceptuando este último, todas las intersecciones i. e. A_+ , A_- ó A_c , tienen la propiedad de que $\dot{r} = 0$.

5 Propiedades circulares

Supongamos que ocurre una explosión en el origen de coordenadas al tiempo $t = 0$, después todos los fragmentos son dispersados en todas direcciones con velocidad v_0 . ¿Dónde se encuentran localizados todos los fragmentos después de un tiempo $t > 0$? Podemos responder fácilmente esta pregunta si nos imaginamos que los fragmentos se mueven en ausencia de gravedad: en cualquier instante t ellos se localizan en una esfera que se expande con un radio $r = v_0 t$ y cuyo centro se localiza en el origen. Con gravedad esta esfera expandiéndose uniformemente, cae libremente (3) como un todo con la aceleración de la gravedad. Esto es, la coordenada y del centro de esta esfera en un instante t es $y = -gt^2/2$, y el plano xy interseca la esfera a lo largo del círculo cuya ecuación es

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v_0^2 t^2 \quad (11)$$

esta ecuación define una familia de círculos en donde se localizan los fragmentos en un tiempo t .

La figura 4 muestra algunos de estos círculos, obviamente la envolvente de esta familia de círculos nos determina la frontera del alcance de los fragmentos disparados en la explosión con la misma velocidad v_0 . Puesto que esta frontera es también la envolvente de las trayectorias parabólicas de los proyectiles podemos encontrar la parábola de seguridad determinando la envolvente de los círculos dados por la Ec. (11) en lugar de la envolvente de las trayectorias parabólicas.

Otra forma de obtener la elipse crítica. Si sustituimos t por el tiempo t_m que tarda en alcanzar la altura máxima, podemos ver que las coordenadas (x_m, y_m) de de los proyectiles se localizan en

$$x_m^2 + \left(y_m + \frac{v_0^2}{2g} \sen^2 \alpha\right)^2 = \frac{v_0^4}{g^2} \sen^2 \alpha$$

para eliminar $\sen^2 \alpha$ de esta ecuación usamos la segunda ecuación de las Ecs (4) de esta forma volvemos obte-

ner fácilmente la ecuación (6) de la elipse crítica.

Lugar geométrico de los focos de las trayectorias parabólicas. De la ecuación de la trayectoria parabólica del proyectil lanzado desde el origen de coordenadas con ángulo de tiro α , es fácil ver que las coordenadas del foco son

$$x_f = \frac{v_0^2}{2g} \sen 2\alpha, \quad y_f = -\frac{v_0^2}{2g} \cos 2\alpha.$$

Eliminando el parámetro α de estas ecuaciones podemos ver que el lugar geométrico de los focos de las trayectorias es una circunferencia de radio $v_0^2/2g$ centrada en el origen. Esta es otra propiedad circular del problema del tiro parabólico.

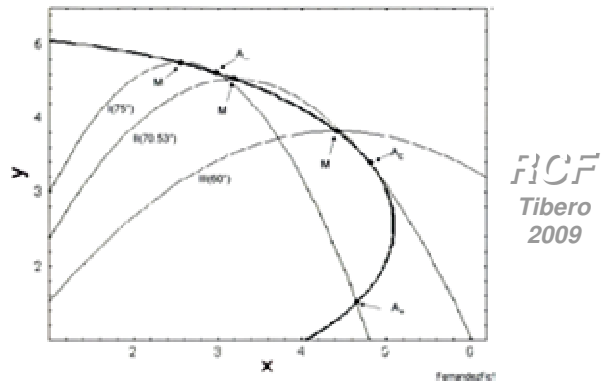
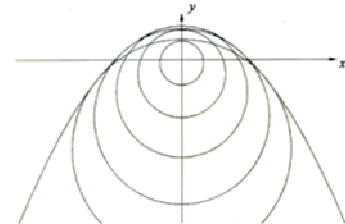


Figura 3. Un segmento de la elipse de retorno.

Figura 4. Los círculos corresponden a las posiciones momentáneas de los fragmentos que se expanden en todas direcciones con velocidades iguales y en caída libre y parábola de seguridad.



6 Conclusiones

En el problema de lanzamiento de proyectiles hemos encontrado propiedades que involucran a tres miembros de las secciones cónicas, esto es un ejercicio interesante y elegante para impartirse en cursos introductorios de mecánica clásica. Sería interesante ver si el cuarto miembro de la familia de las cónicas, la hipérbola, existe en este interesante problema.

Referencias

1. M. Bacé, S. Iljić, Z. Narancić, and L. Bitrić, "The envelope of projectile trajectories", Eur. J. Phys. **23**, 637-642 (2002).
2. E. I. Butikov, "Comment on 'Comment on 'The envelope of projectile trajectories',", Eur. J. Phys. **24**, L5-L9 (2003).
3. Denis Donnelly, "The parabolic envelope of constant initial speed trajectories", Am. J. Phys. **60**, 1149-1151 (1992).
4. J. L. Fernández-Chapou, A. L. Salas and C. A. Vargas, Am. J. Phys. **72**, 1109 (2004).