

ONDAS SUPERFICIALES EN UN LÍQUIDO CON CONFINAMIENTO ELÍPTICO

SURFACE WAVES IN A LIQUID WITH ELLIPTICAL CONFINEMENT

M. OLIVA

Departamento de Física Teórica, Universidad de La Habana, Vedado, 10400 La Habana, Cuba. moliva@fisica.uh.cu

Se estudian con detalle ondas superficiales en un fluido no viscoso en tanques cilíndricos con sección transversal elíptica. Se presenta una completa caracterización del potencial de velocidad y la amplitud de la superficie libre en términos de funciones de Mathieu. Nuestros resultados numéricos muestran la dependencia de las frecuencias naturales en función de las propiedades del fluido y la excentricidad e de la sección transversal del tanque. La evolución de la estructura nodal de las ondas de gravedad capilaridad es modulada al variar e .

Inviscid surface waves in cylindrical containers with elliptical crosssection are studied in detail. A complete characterization of the velocity potential and the amplitude of the liquid surface is given in terms of Mathieu functions. Our numerical results show the dependence of the natural frequencies on the fluid properties and the eccentricity e of the container cross-section. The evolution of the nodal structure for gravity-capillary waves is modulated by changing e .

Keywords. Gravity waves 47.35.Bb, capillary waves 47.35.Pq, Boundary-value problems 02.60.Lj

INTRODUCCIÓN

El estudio de las ondas superficiales en un líquido contenido en un recipiente ha generado una gran cantidad de investigaciones experimentales y teóricas [1, 2]. El análisis modal del movimiento de la superficie libre es usualmente utilizado para estimar las frecuencias naturales de oscilación y las correspondientes formas superficiales de los modos de oscilación. El conocimiento de las frecuencias naturales es esencial en el proceso de diseño de los contenedores cisternas y sistemas de control activo en vehículos espaciales [1, 2].

Son posibles soluciones exactas solo en pocos casos especiales como tanques cilíndricos de secciones transversales circular y rectangular. Como ejemplo interesante tenemos la predicción teórica de las frecuencias naturales cuando el borde de la superficie libre del líquido está fija al borde del tanque [3, 4]. Este interesante problema con ligaduras ha encontrado una excelente concordancia entre teoría y experimento. De especial importancia ha resultado la concordancia entre los valores calculados del coeficiente de amortiguamiento y la data experimental, pues ha permitido aclarar la relevancia de los diferentes mecanismos que contribuyen el amortiguamiento, en particular, la disipación viscosa producida en el volumen del líquido [5, 6, 7].

Al menos desde un punto de vista teórico sería interesante extender recientes resultados alcanzados en geometría circular [8, 9, 10, 11].

Una extensión natural sería considerar la problemática en re-

recipientes con sección transversal elíptica. Sin embargo, aun el problema de las ondas superficiales estacionarias en un fluido ideal donde la línea de contacto se mueve libremente por las paredes laterales de un tanque elíptico, ha sido tratado pobremente [12, 13, 14]. El propósito principal de este trabajo es presentar una discusión completa de este problema. Este trabajo está organizado como sigue. En la Sección 2 se presentan las ecuaciones generales que describen las ondas estacionarias en un fluido ideal en recipientes cilíndricos. Se consideran los efectos de la tensión superficial. En la Sección 3 se da la solución exacta del problema de autovalores para tanques elípticos, la cual involucra funciones de Mathieu cuyas propiedades determinan la simetría de los patrones nodales. Los autovalores y frecuencias naturales son mostrados en función de la excentricidad de la sección transversal del tanque. Finalmente, en la Sección 4, presentamos las conclusiones del trabajo y sus posibles extensiones.

FORMULACIÓN

Considerando un fluido ideal y bajo la aproximación de oscilaciones pequeñas en la superficie libre del líquido, el potencial de velocidad Φ que describe el flujo tridimensional asociado a la onda superficial satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta los efectos de la tensión superficial y que

las paredes del tanque son impenetrables, el potencial satisface las condiciones de frontera [15]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (z = 0) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{L} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (z = -h) \quad (4)$$

donde g es la aceleración gravitatoria, h la profundidad media del fluido, ρ la densidad, \mathcal{L} la frontera de la sección transversal del tanque y $\mathbf{n} = (n_1; n_2; 0)$ un vector unitario perpendicular al contorno \mathcal{L} (vea la Figura 1).

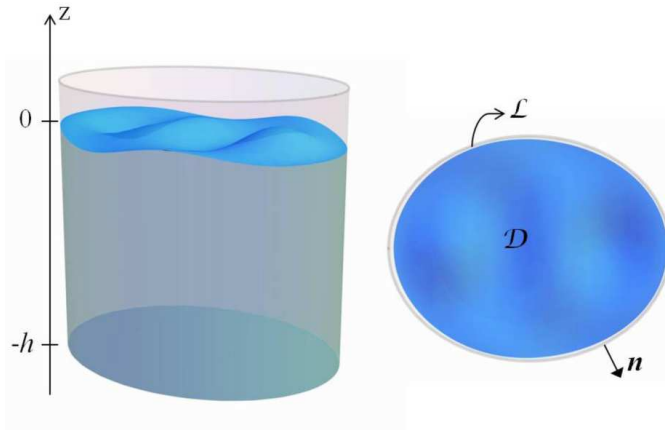


Figura 1. (a) Izquierda, vista frontal de un tanque elíptico. (b) Vista superior del tanque. El dominio bidimensional D (sección transversal) es limitado por la elipse L .

De la simetría axial del tanque y la ecuación (4) la solución estacionaria para Φ puede ser investigada como

$$\Phi = \Psi(x, y) \cosh k(z + h) \exp(i\omega t), \quad (5)$$

donde k es el número de onda y ω la frecuencia angular, en adelante la llamaremos solo frecuencia. De (5) y (2) obtenemos la siguiente relación de dispersión para estas magnitudes

$$\omega = \sqrt{\left(g + \frac{\sigma}{\rho} k^2\right) k \tanh(kh)}. \quad (6)$$

de donde se sigue que si $1 \gg (\sigma k^2)/(g\rho)$ estamos en régimen de ondas de gravedad y en el caso contrario, $1 \gg (\sigma k^2)/(g\rho)$, en régimen de ondas de capilaridad.

Sustituyendo (5) en las ecuación (1) obtenemos que la función potencial bidimensional $\Psi(x, y)$ satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (7)$$

en el interior de dominio D , limitado por la frontera L donde la condición de frontera de Neumann (3) debe cumplirse. Señalamos que si $(x; y; t)$ denota los pequeños desplazamientos de la

superficie libre medidos a partir de $z = 0$, estos están relacionados con el potencial bidimensional Ψ por la ecuación [15]

$$\zeta = i\bar{\zeta}(x, y) \exp(i\omega t), \quad \bar{\zeta} = \frac{w \cosh(kh)}{g + \sigma k^2/\rho} \Psi(x, y). \quad (8)$$

Estas expresiones revelan que al estudiar la estructura nodal de la función Ψ obtendremos información sobre la perturbación superficial. Por tanto, si somos capaces de resolver la ecuación de Helmholtz con condiciones de frontera de Neumann, entonces conoceremos las principales características de las ondas de gravedad-capilaridad de un fluido ideal contenido en un tanque cilíndrico.

En la próxima sección se describe la solución de la ecuación (7) para estudiar el comportamiento de las ondas superficiales de un líquido en un tanque con simetría elíptica.

MODOS NORMALES DE OSCILACIÓN

La ecuación de Helmholtz bidimensional puede ser escrita en coordenadas elípticas como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\varrho^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) k^2 \Psi = 0, \quad (9)$$

con $0 \leq \xi, 0 \leq \eta < 2\pi$ y el parámetro $\varrho > 0$, las cuales están relacionadas con las coordenadas cartesianas por [16]

$$x = \varrho \cosh \xi \cos \eta, \quad y = \varrho \sinh \xi \sin \eta,$$

tal que las curvas $\xi = \text{const}$ y $\eta = \text{const}$ son elipses e hipérbolas confocales, respectivamente, con focos en $(\pm \varrho, 0)$: En este caso se buscan las soluciones de la ecuación (9) en el interior del dominio $\mathcal{D} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq \xi_0, 0 \leq \eta < 2\pi\}$, cuya frontera L es una elipse con semi-eje mayor (menor) $A(B)$. La ecuación (9) es separable si se propone $\Psi(\xi, \eta) = NF(\xi)G(\eta)$, donde N es una constante de normalización, y las funciones $F(\xi)$ y $G(\eta)$ satisfacen

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \alpha + \frac{\varrho^2 k^2}{2} \cosh 2\xi \right] F = 0, \quad (10)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \alpha - \frac{\varrho^2 k^2}{2} \cos 2\eta \right] G = 0, \quad (11)$$

siendo α una constante de separación. La ecuación (11) es la ecuación de Mathieu, y debido a que $G(\eta)$ debe ser periódica según consideraciones físicas ($G(\eta) = G(\eta + 2\pi)$), solo podrá tomar ciertos valores característicos [16]. Estos valores son denotados por $a_m(q)$ para las soluciones pares $G_e = ce_m(\eta, q)$, y por $b_m(q)$, para las impares $G_o = se_m(\eta, q)$, donde $4q = \varrho^2 k^2$. Notemos que (10), ecuación modificada de Mathieu, puede ser obtenida de (11) por la sustitución $\eta = i\xi$, de esta forma

$$F_e = ce_m(i\xi, q) = Ce_m(\xi, q), \quad m = 0, 1, 2, \quad (12)$$

$$F_o = -i se_m(i\xi, q) = Se_m(\xi, q), \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

donde Ce_m y Se_m son las funciones modificadas de Mathieu de primer tipo (soluciones radiales). En consecuencia, el conjunto completo de soluciones de (9) puede ser clasificado en autofunciones pares o impares

$$\Psi_m^e = N_m^e ce_m(\eta, q) Ce_m(\xi, q), \quad (14)$$

$$\Psi_m^o = N_m^o se_m(\eta, q) Se_m(\xi, q). \quad (15)$$

La paridad de estas funciones respecto a la variable η implica que la autofunción Ψ_m^e sea simétrica respecto al eje x , mientras Ψ_m^o es antisimétrica, como veremos más adelante.

Autovalores del número de onda: En coordenadas elípticas la condición de frontera $\partial\Psi/\partial\mathbf{n} = 0$ en $(x, y) \in \mathcal{L}$ puede demostrarse que se reduce a

$$\left. \frac{dF}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (16)$$

donde $\xi_0 = \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-e^2})$ y e es la excentricidad. Si denimos $k = k\rho/e = kA$, de (16) obtenemos el conjunto de autovalores adimensionales pares $\tilde{k}_{m,n}^e$ impares $\tilde{k}_{m,n}^o$ para el número de onda $\tilde{k}_{m,n}$, donde $\tilde{k}_{m,n}^e$ y $\tilde{k}_{m,n}^o$ son las raíces de

$$Ce'_m(\xi_0, (e\tilde{k}_{m,n}^e/2)^2) = 0, \quad Se'_m(\xi_0, (e\tilde{k}_{m,n}^o/2)^2) = 0, \quad (17)$$

con $n = 1; 2; \dots$ Notemos que los autovalores adimensionales $\tilde{k}_{m,n}$ dependen solamente de la excentricidad e .

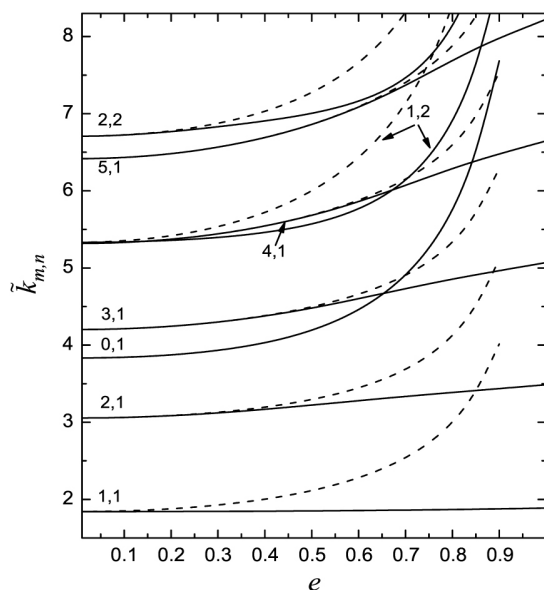


Figura 2. Autovalores $\tilde{k}_{m,n}$ como función de la excentricidad e . Las líneas sólidas (discontinuas) representan los autovalores de los modos pares (impares).

La Figura 2 muestra la variación de los primeros 15 autovalores $\tilde{k}_{m,n}$ como función del parámetro geométrico e . Como era de esperar, a mayores valores de e (elipses más estrechas) corres-

ponden mayores valores de $\tilde{k}_{m,n}$. Sin embargo, puede apreciarse que los autovalores impares son significativamente más sensibles al confinamiento que los autovalores pares, es decir, $\tilde{k}_{m,n}^o > \tilde{k}_{m,n}^e$ para un valor de excentricidad dado. Este resultado puede ser clarificado a partir de un sencillo razonamiento físico del problema, para el cual tomaremos como ejemplo a los dos modos más bajos, $\tilde{k}_{1,1}^e$ y $\tilde{k}_{1,1}^o$. El eje mayor es una línea nodal para la perturbación superficial $\zeta_{1,1}^o$ del modo par $(1, 1)$ ($se_1 = 0$ para $\eta = 0, \pi$), mientras el eje menor es una línea nodal para la perturbación $\zeta_{1,1}^e$ ($ce_1 = 0$ para $\eta = \pi/2, 3\pi/2$), por lo cual, las perturbaciones $\zeta_{1,1}^o$ y $\zeta_{1,1}^e$ se mueven perpendicular y paralelo al eje mayor, respectivamente. Por tanto, el tiempo empleado por $\zeta_{1,1}^o$ en atravesar el tanque es menor que el tomado por $\zeta_{1,1}^e$, lo que implica que $w_{1,1}^o > w_{1,1}^e$ y como consecuencia, dado que $w_0 \propto k$, se obtiene que $\tilde{k}_{1,1}^o > \tilde{k}_{1,1}^e$. En particular, en el límite $B \rightarrow A$, de (17) se obtiene que

$$\tilde{k}_{1,1}^e = \mu_{1,1} + 0.0375 e^2 + \mathcal{O}(e^4),$$

$$\tilde{k}_{1,1}^o = \mu_{1,1} + 0.8831 e^2 + \mathcal{O}(e^4),$$

donde $\mu_{1,1} \approx 1.8412$ es el autovalor del modo básico en un recipiente de sección circular. En general, cuando la excentricidad tiende a cero los autovalores $\tilde{k}_{m,n}$ tienden a los autovalores $\mu_{m,n}$ del problema en geometría circular, donde $\mu_{m,n}$ es el n -ésimo cero de $J'_m(\mu)$ ($J_m(\mu)$ es la función de Bessel de orden m). Esta degeneración es mostrada claramente. En el límite opuesto, $e \rightarrow 1$, en la Figura 2 se observa que solo los autovalores del tipo $\tilde{k}_{m,1}^e$ ($m > 0$) tienden a un valor finito, mientras el resto diverge [13].

Simetría y patrón nodal: Como la perturbación de la superficie libre ζ es proporcional a Ψ (vea ec. (8)), y dado que, $Ce(\xi, q)$ o $Se(\xi, q)$ son constantes sobre una elipse confocal ($\xi = \text{const.}$), entonces la simetría espacial de ζ depende de las funciones angulares de Mathieu $ce(\eta, q)$ o $se(\eta, q)$. Estas funciones presentan las siguientes relaciones de paridad y simetría [13]

$$\begin{aligned} ce_{2l}(\eta, q) &= ce_{2l}(\pi \pm \eta, q) = ce_{2l}(2\pi - \eta, q), \\ ce_{2l+1}(\eta, q) &= -ce_{2l+1}(\pi \pm \eta, q) = ce_{2l+1}(2\pi - \eta, q), \\ se_{2l+1}(\eta, q) &= \pm se_{2l+1}(\pi \mp \eta, q) = -se_{2l+1}(2\pi - \eta, q), \\ se_{2l+2}(\eta, q) &= \pm se_{2l+2}(\pi \pm \eta, q) = -se_{2l+2}(2\pi - \eta, q). \end{aligned}$$

De estas relaciones se sigue que $\zeta_{2l,n}^e$ ($\zeta_{2l+2,n}^o$) es simétrica (antisimétrica) con respecto a ambos ejes; $\zeta_{2l+1,n}^e$ ($\zeta_{2l+1,n}^o$), simétrica (antisimétrica) con respecto al eje mayor, pero antisimétrica (simétrica) con respecto al eje menor. Estas propiedades de simetría de ζ son mostradas en la Figura 3, donde una vista tridimensional de la amplitud $\bar{\zeta}$ de la perturbación superficial es mostrada para los modos $(4, 1)$ y $(3, 2)$ en un recipiente con $e = 0.6$.

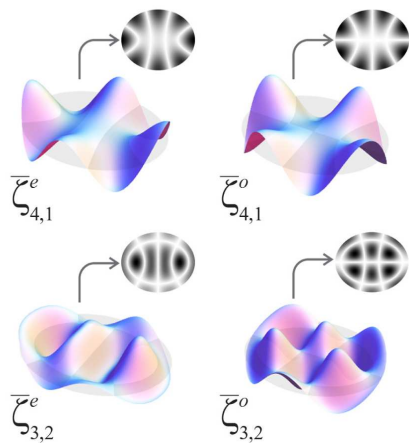


Figura 3. Vista 3D ampliada de la amplitud $\bar{\zeta}_{m,n}(\xi, \eta)$ de la superficie del líquido para los modos pares e impares (4, 1) y (3, 1) en un tanque con excentricidad $e = 0.6$. Encima de cada figura 3D aparece su respectivo patrón nodal.

Los patrones nodales mostrados en la Figura 3 reflejan la geometría elíptica del tanque y permiten una interpretación a las etiquetas m, n . Si $n = r$ y $m = p$ tendremos $r - 1$ elipses confocales y p ramas de hipérbolas confocales. Note que para los modos impares la línea $y = 0$ es considerada como una rama de hipérbola degenerada. En el límite $e \rightarrow 0$, vea la Figura 4, las elipses e hipérbolas se convierten en $r - 1$ círculos concéntricos y p diámetros, respectivamente.

De la Figura 4 se puede inferir que, en el caso límite $e \rightarrow 1$, cuando la elipse frontera degenera al eje mayor, el patrón nodal del modo par (4, 1) son 4 puntos sobre el eje mayor, similar al de una cuerda oscilante con extremos libres. Esto implica que aun en este caso límite la longitud de onda asociada a este modo sea finita (del orden de $A/2$), y por lo tanto, el número de onda k . Este argumento se puede extender a todos los modos pares ($m, 1$), lo cual explica por qué en la Figura 2 los autovalores $\tilde{k}_{m,1}^e$ tienen un valor finito para $e = 1$. Para el resto de los modos, cuando $e \rightarrow 1$, de la figura se puede inferir que la longitud de onda tiende a cero, por lo cual el autovalor correspondiente diverge.

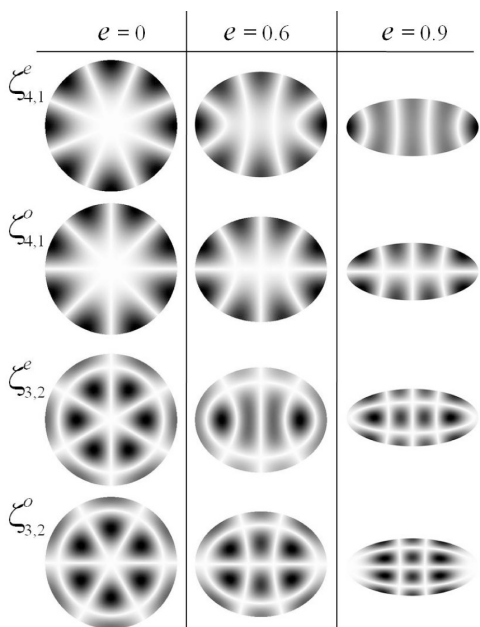


Figura 4. Patrón nodal de los modos pares e impares (4, 1) y (3, 1) en tanques con diferentes valores de excentricidad.

Autofrecuencias: Para calcular las autofrecuencias de los modos estacionarios la ecuación (6) puede ser reescrita como

$$w\sqrt{A/g} = \sqrt{\left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{B_o}\right) \tilde{k} \tanh(\Gamma \tilde{k})}, \quad (18)$$

donde $B_o = g\rho A^2/\sigma$ es el número de Bond y $\Gamma = h/A$, el factor de llenado. Para el cálculo fueron considerados los valores, $B_o = 100$ y $\Gamma = 1.37$, los cuales corresponden con experimentos hechos con agua [5, 7]. Para el valor de Γ usado podemos suponer la aproximación de aguas profundas ($\tanh(\Gamma \tilde{k}) \rightarrow 1$) con un error relativo para $w\sqrt{A/g}$ menor del 1% para los modos estudiados. Notemos que para el valor del número de Bond usado los modos más bajos se comportan como ondas de gravedad ($\tilde{k}^2/B_o \ll 1$), por ejemplo, para el modo par (1, 1) tenemos que $\tilde{k}_{1,1}^2/B_o < 0.04$ en todo el rango de variación de e . Sin embargo, con $B_o = 100$ los modos más excitados, como el modo par (2, 2), se comportan como ondas de gravedad-capilaridad ($\tilde{k}^2/B_o \sim 1$).

En la Figura 5 se muestra el resultado de nuestra evaluación para los 15 primeros modos. Puede observarse que las autofrecuencias muestran el mismo comportamiento que los autovalores con la variación de la excentricidad, lo cual es producto de la proporcionalidad directa entre w y $\tilde{k}_{m,n}$. En la figura también se observan múltiples puntos de degeneración accidental, es decir, diferentes modos con igual frecuencia. Ejemplos particulares de degeneración están representados en la figura por los puntos a , b y c . Estos tres ejemplos se diferencian por la paridad de los modos involucrados en la degeneración. De manera general, de la Figura 5 se sigue que para mayores valores de la excentricidad ($e \gtrsim 0.6$) aumenta la posibilidad de obtener un mayor número de degeneración accidental.

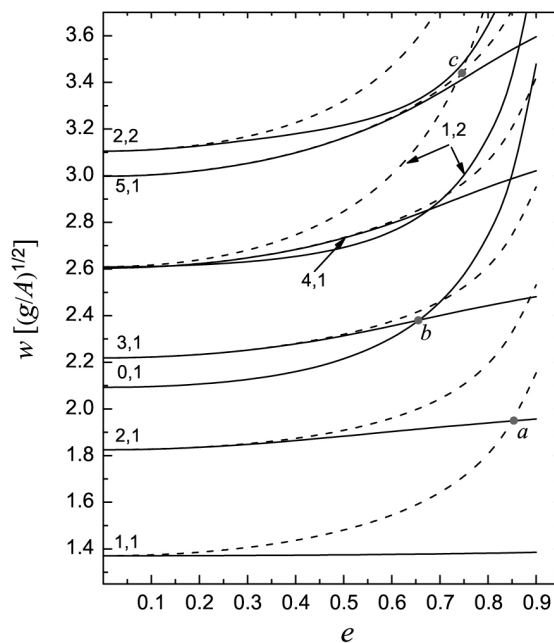


Figura 5. Autofrecuencias en unidades de $\sqrt{g/A}$ como función de e . Condiciones experimentales consideradas en el cálculo: $\Gamma = 1.37$ y $B_o = 100$. Igual notación que en la Figura 2. Coordenadas de los puntos de degeneración: $a(0.85, 1.95)$, $b(0.65, 2.38)$ y $c(0.75, 3.44)$.

CONCLUSIONES

En este trabajo fueron derivadas soluciones analíticas para el potencial de velocidad de ondas de gravedad-capilaridad confinadas en una región elíptica en términos de funciones de Mathieu. Las frecuencias (18) de los modos normales de oscilación son dadas en función del número de Bond B_o , el factor de llenado Γ y el conjunto de autovalores $\tilde{k}_{m,n}$, los cuales dependen de la excentricidad e . Se mostró como al variar la geometría se puede modular la forma de oscilar de cada modo, encontrándose una mayor riqueza del comportamiento oscilatorio al aumentar el confinamiento. Estos resultados proveen una base versátil para el estudio y la simulación dinámica de ondas superficiales bajo confinamiento elíptico, aun para otras condiciones de contorno, como por ejemplo, recipientes llenos hasta el borde y/o ángulo de contacto estático distinto de $\pi/2$ [4, 8, 17].

Una extensión inmediata de este trabajo es considerar un fluido poco viscoso y determinar el amortiguamiento inherente a partir de una aproximación de capa límite, para lo cual la solución obtenida del problema ideal sería útil [5, 6]. Más pretencioso sería intentar describir el fenómeno ondulatorio a partir de una ecuación "típica" de ondas sin limitarnos a viscosidades bajas [18, 19]. Un preciso conocimiento del coeficiente de amortiguamiento es esencial para la construcción de una consistente teoría no lineal de ondas superficiales [20].

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a C. Trallero-Giner por sus comentarios constructivos.

- [1] *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*, editado por H. N. Abramson, NASA TR SP-106 (1966).
- [2] R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [3] T. B. Benjamin y J. C. Scott, *J. Fluid Mech.* **92**, 241 (1979).
- [4] J. Graham-Eagle, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **94**, 553 (1983).
- [5] D. M. Henderson y J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **275**, 285 (1994).
- [6] J. W. Miles and D. M. Henderson, *J. Fluid Mech.* **364**, 319 (1998).
- [7] D. R. Howell, B. Buhrow, T. Heath, C. McKenna, W. Hwang y M. F. Schatz, *Phys. Fluids* **12**, 322 (2000).
- [8] J. A. Nicolás, *Phys. Fluids* **17**, 022101 (2005).
- [9] P. N. Shankar, *Fluid Dyn. Res.* **39**, 457 (2007).
- [10] R. Kidambi, *Wave Motion* **46**, 144 (2009).
- [11] R. Kidambi, *J. Fluid Mech.* **627**, 323 (2009).
- [12] H. Jeffreys, *Proc. London Math. Soc.* **23**, 455 (1924).
- [13] N. M. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions* (Oxford University Press, New York, 1947).
- [14] W. H. Chu, *Amer. Rocket Soc. J.* **30**, 360 (1960).
- [15] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, New York, 1959).
- [16] *Handbook of Mathematical Functions*, editado por M. Abramowitz y I. Stegun (Dover, New York, 1972).
- [17] D. M. Henderson, J. Hammack, P. Kumar y D. Shah, *Phys. Fluids A* **4**, 2300 (1992).
- [18] J. M. Antuña y O. Sotolongo, *Rev. Cub. Fis.* **11**(1), 11 (1991).
- [19] J. M. Antuña y O. Sotolongo, *Rev. Cub. Fis.* **11**(2-3), 135 (1991).
- [20] J. W. Miles y D. M. Henderson, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 143 (1990).