Received 01/05/12 Accepted 01/06/12


# FÍSICA Y MÚSICA: DEL TIMBRE, A LO DESCONOCIDO

D. Stolik

Facultad de Física, Universidad de La Habana, dstolik@fisica.uh.cu

En forma sucinta se describe la relación entre la física –con su lenguaje matemático– y la música. Se analizan algunos conceptos fundamentales: frecuencia y altura, el intervalo musical, la escala, la frecuencia fundamental de un tono, la no linealidad e inarmonicidad de los instrumentos musicales, y el comportamiento en el dominio frecuencia–tiempo característico de la música. Finalmente, se presentan campos de investigación abiertos en el ámbito de la física y la música.

The relation between physics –with its mathematical language– and music is briefly described. Concepts such as frequency, height, musical interval, scale, fundamental frequency, tone, non-linearity and "anharmonicity" of musical instruments are presented, as well as the behavior of music in the frequency-time domain. Finally, open research fields in the scenario of physics and music are presented.

## INTRODUCCIÓN

Arte es virtud, disposición y habilidad de hacer cosas, sobre la base de un conjunto de preceptos y reglas, representa el acto o facultad mediante los cuales, el hombre, valiéndose de la materia, de la imagen o del sonido, imita o expresa lo material o lo inmaterial, crea copiando o fantaseando, y así transmite sentimientos de placer, satisfacción, diversión, tristeza y hasta depresión [1].

La ciencia, aunque también provoca distintas sensaciones en el hombre, fundamentalmente representa el conocimiento cierto de las cosas por sus principios y causas, metódicamente formado y ordenado en un cuerpo que constituye una rama particular del saber humano [2].

La física es una ciencia donde los fenómenos se demuestran, se miden cuantitativamente y se comprueban experimentalmente. Existe el concenso de que surgió como ciencia en el siglo XVI [3]. En quinientos años ha sido fundamental para la comprensión del universo y ha alcanzado un avance tal que ha originado un espectacular desarrollo científico y tecnológico.

La música, sin embargo, es mucho más antigua: todo parece indicar que los primeros instrumentos musicales aparecieron hace algunas decenas de miles de años. Aunque aún es objeto de debate [4], se ha documentado la "flauta" del "Hombre de Neandenthal": un instrumento de 4 huecos, construido con un hueso de oso hace unos 40 mil años.

La música es un arte cualitativo muy ligado a los sentimientos humanos, que está presente en la vida cotidiana de cada uno de nosotros. Por lo tanto, al referirnos a la física y a la música estamos hablando de dos escenarios que son trascendentales en la vida del hombre, pero cuya interrelación es relativamente poco conocida por muchos.

Un elemento que con el paso del tiempo ha vinculado cada vez más el arte y la ciencia es la tecnología: ésta constituye el lenguaje propio de una ciencia, arte, o de ambas a la vez, que se plasma en un conjunto de productos, instrumentos, equipamientos y procedimientos cada vez más con carácter industrial. Es la física la madre de muchas de las tecnologías que se han ido incorporando y utilizan ampliamente en la música, hasta las más recientes como son, por ejemplo las importantes tecnologías digitales MIDI [5] surgida en 1983 y la de sintetizadores y *samplers* [6].

Este artículo va dirigido a un el lector que domina los fundamentos de la matemática y la física, y que está familiarizado con la computación. A continuación, explicamos algunos conceptos del ámbito musical en términos familiares para nuestros lectores.

En realidad es imposible en un artículo sucinto, como éste, reflejar toda la problemática físico-matemática del tema. Nuestro propósito es partir del papel de las funciones matemáticas elementales, pasando por los elementos no armónicos y no lineales, hasta llegar a los problemas del dominio frecuencia-tiempo en que se mueve la música, en forma análoga al principio de incertidumbre que se postula en la mecánica cuántica, pero para el dominio tiempo-frecuencia, donde las transformada clásica de Fourier no opera. Esperamos que esta descripción motive a nuestros colegas físicos a que se acerquen a una temática generalmente poco conocida.



REVISTA CUBANA DE FÍSICA, Vol. 29, No. 1 (Junio 2012)
PARA FÍSICOS Y NO-FÍSICOS (Ed. E. Altshuler)

Antes de continuar, vale la pena mencionar que existe literatura donde se puede hacer una lectura complementaria sobre la física y la música [7-10], así como el libro de este autor en soporte electrónico de la multimedia "Física y Música" [11].
Finalicemos esta sección haciendo notar que es también muy poco conocido el aporte que por unos 400 años, desde Stevin y Galileo, hasta Moog (fallecido recientemente) han realizado físicos muy notables al desarrollo de la música [12-15].

## LA INTENSIDAD DEL SONIDO

Comencemos por introducir brevemente la recepción del sonido por el oído humano. La potencia y la intensidad de la onda sonora, válidos, por supuesto, para el sonido musical, son proporcionales al cuadrado de la amplitud [16]:

$$I = cX_m^{\ 2} \qquad (1)$$

Donde $I$ es la intensidad de la onda sonora, $X_m$ es la amplitud, y $c$, una constante.

Sea $I_0$ la intensidad mínima del sonido (estímulo) que el oído humano, como promedio, es capaz de percibir, que se define como valor típico del umbral de audición humana. Se ha determinado que su valor es:

$$I_0 = 10^{-12} \ \ \mathrm{W/m^2} \qquad (2)$$

Esta potencia se corresponde, increíblemente, con un desplazamiento de la vibración del tímpano del orden del radio atómico del átomo de hidrógeno [17]. Además, se ha comprobado que el rango de intensidades que el oído es capaz de detectar es de un millón de millones de veces mayor que $I_0$ [18]. O sea, que la relación $I / I_0$ del oído humano barre un rango de... ¡12 órdenes de magnitud!

Por ser la escala de audición sobre la base de $I / I_0$ demasiado extensa (y, por lo tanto, incómoda) se utiliza el logaritmo de $I / I_0$ como escala de audición. Así, el nivel de sonido (SL),expresado en *decibeles*, se define como:

$$SL = 10 \ \log(I / I_0) \qquad (3)$$

## LA ALTURA

En música, la altura no es equivalente a la intensidad del sonido [7,8]. La altura es la sensación, también llamada tono, que percibe una persona en un rango de sonidos desde graves hasta agudos, a partir del estímulo que recibe de una onda sonora de cierta frecuencia. La relación existente entre dicho estímulo y la sensación producida es sumamente compleja.

Figura 1. El "Theremin": La física al servicio de la música. Este instrumento, concebido por el físico y músico soviético Lev Segueevich Termen en 1919, logra sonidos musicales derivados del efecto capacitivo del cuerpo humano sobre ondas electromagnéticas. En la foto, un ejemplar del instrumento que se expone en el Museo Nacional Noruego de Ciencia y Tecnología (foto: E. Altshuler).

## EL INTERVALO MUSICAL Y LAS DIVISIONES

El intervalo musical es la diferencia existente entre dos sonidos (tonos) de distinta altura. Es uno de los elementos de la música más importantes, su primera cuantificación matemática data de los pitagóricos hace unos 2500 años, en términos de relaciones de números enteros de longitudes de las cuerdas [7,8.11]. Concretamente, si una cuerda se fijaba en 1/2, en 2/3 o en 3/4 de su longitud, la altura de los sonidos percibidos al vibrar eran característicamente distintos (lo que se produce, por ejemplo, al "presionar" las cuerdas de una guitarra en diversas posiciones a lo largo de su brazo). Estamos hablando aquí de relaciones de longitud; por ejemplo:

$$L_2 / L_1 \qquad (4)$$

donde $L_2$ es la longitud de una cuerda que origina una sensación específica de altura en el sistema oído-cerebro, $L_1$ define otra altura, y $L_2 / L_1$ es el intervalo resultante entre esas dos longitudes de la cuerda tensada. Obsérvese el curioso hecho de que el intervalo no está definido como la diferencia entre dos longitudes, sino por su cociente.

Unos 2000 años después se definía el concepto de *frecuencia* en las cuerdas tensadas y la caracterización del intervalo musical posteriormente se realizaba por relaciones de frecuencias entre dos sonidos de distintas alturas, o sea, más grave o más aguda:

$$f_2 / f_1 \qquad (5)$$

Mucho más tarde, se descubrió que las frecuencias de una cuerda tensada vibrante estaban dadas por la expresión [11]:

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (6)$$

Donde $n$ es el modo de vibración, $T$ es la tensión de la cuerda, $L$ es su longitud, y $\mu$ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. Supondremos que todas las magnitudes están dadas en el Sistema Internacional de Unidades (SI). Es evidente de (6) que en una misma cuerda (monocordio), por ser $T$ y $\mu$ constantes, se obtiene:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1} \qquad (7)$$

Relación ampliamente utilizada para los instrumentos de cuerda desde la antigüedad.

## EL TIMBRE

¿Por qué pueden distinguirse dos instrumentos musicales distintos que emiten una nota de la misma frecuencia? Eso se explica debido a que cualquier sonido musical tiene una frecuencia, llamada fundamental [7,8,11], que es la mas pequeña de un conjunto de frecuencias de ondas viajeras sinusoidales (armónicos) múltiplos enteros de la fundamental, con distintas amplitudes y que todas en conjunto dan la característica de sonido distinto entre (por ejemplo) un piano, un oboe o un violín. Todas esas amplitudes distintas de frecuencias específicas se superponen y modifican la forma de la señal producto de la síntesis de Fourier.

El fenómeno consiste [11] en que la sinusoide de la frecuencia fundamental va modificando su forma cuando se van superponiendo los armónicos superiores, pero el periodo de la señal compleja que se forma sigue siendo igual al período de la primera sinusoide de la frecuencia fundamental. La *forma* resultante es la que caracteriza el *timbre* del sonido en cuestión, cuya forma compleja se repite con la misma periodicidad de la frecuencia fundamental, que en definitiva caracteriza la frecuencia de toda la señal compleja (ver figura 2).

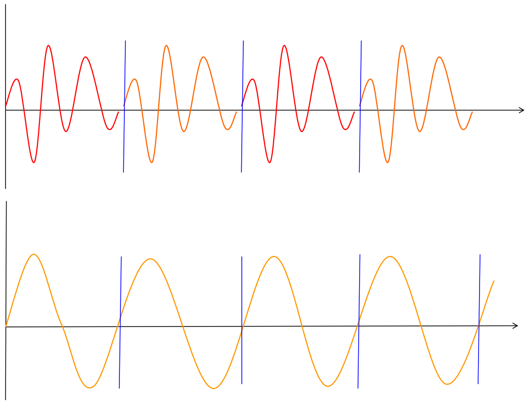

Figura 2. Gráficos de amplitud contra tiempo de una onda sonora asociada a un supuesto instrumento musical. Panel superior: onda original, cuya forma "compleja" caracteriza el timbre del instrumento (contiene todos los armónicos de Fourier). Panel inferior: Armónico fundamental de la onda de arriba. Nótese, arriba, que entre las líneas finas verticales, se repite el mismo período de la componente fundamental.

Los *armónicos* del timbre responden a la función lineal:

$$f = nf_0 \qquad (8)$$

donde $f_0$ es la frecuencia fundamental (la menor involucrada en el timbre), $n$ es un número entero, y $f$ es la frecuencia de los armónicos superiores –una función extremadamente importante en la música.

## LAS ESCALAS MUSICALES

La escala musical es un conjunto con cierta ordenación de distintas alturas con intervalos que se expresan matemáticamente, donde por cientos de años primó el concepto de intervalos (pitagóricos) descritos por relaciones de números enteros [11]. El intervalo musical que más fácilmente se reconoce por el hombre sin necesidad de instrumento alguno es el de la denominada *octava*. La frecuencia de una octava inmediata superior tiene el doble de la frecuencia de la nota de anterior. Así, la frecuencia de la octava n-sima se expresa así:

$$f_n = 2^n f_0 \qquad (9)$$

donde, nuevamente, $n$ es un entero [11]. Nótese la gran diferencia entre la definición de los armónicos del timbre (8) y la de las octavas (9). En el caso de la escala musical compuesta por 12 intervalos iguales, las frecuencias se expresan como:

$$f_m = 2^{\frac{m}{12}} f_0 \qquad (10)$$

Esta es la escala que ha partir del siglo XIX, se generalizó en el Occidente, después de grandes controversias sobre qué escalas son más "puras". Éste es un aspecto de grandes contradicciones teóricas aún actuales, muy relacionado con la incomprensión de la belleza y de la gran utilidad de los números irracionales como $\pi$, $e$, etc. en la descripción matemática de los fenómenos físicos [11].

## LINEALIDAD E INARMONICIDAD EN LA MÚSICA

El estudio más elemental de los instrumentos musicales se basa en un tratamiento de aproximación lineal de los armónicos. El término lineal implica que un incremento en la entrada de cualquier sistema produce un incremento directamente proporcional en la salida y los efectos provocados por las distintas excitaciones en las entradas son simplemente aditivos a la salida.

Como se ha dicho, se estima que el sonido musical puede ser descrito en términos de componentes (armónicos), cuyas frecuencias son números enteros de una frecuencia fundamental. La aproximación armónica se debe a que los modos de frecuencia (vibraciones) de las cuerdas tensadas y las columnas de aire cilíndricas y conos de los instrumentos de viento son armónicos. Ellos son resonadores pasivos que se acoplan a una


REVISTA CUBANA DE FÍSICA, Vol. 29, No. 1 (Junio 2012)
PARA FÍSICOS Y NO-FÍSICOS (Ed. E. Altshuler)

fuente de energía de excitación controlable (arcos de fricción, chorros de aire de lengüetas vibrantes, etc.) para provocar y mantener o no las oscilaciones.

En los instrumentos musicales de percusión (campanas, *gongs*, *drums*, tumbadoras, bongoes) los modos no se relacionan armónicamente, sino que son altamente inarmónicos, de lo que se derivan sus sonidos característicos.

Si profundizamos en la física de estos fenómenos, encontramos que los modos de una cuerda tensada real (frotada, como en el violín, o percutida, como en el piano) no son exactamente armónicos debido fundamentalmente a la inflexibilidad de las cuerdas. En los instrumentos de viento, se observa que las vibraciones de los modos de las columnas de aire de tubos cilíndricos son apreciablemente inarmónicos debido a la variación de la longitud de onda (y por lo tanto la frecuencia) al final del tubo cilíndrico.

En la aproximación armónica se asume que un segundo generador suministra una resistencia negativa de magnitud limitada, suficiente para compensar las perdidas acústicas y mecánicas de un primer resonador. En los instrumentos de viento el primer resonador es la columna de aire, que al mismo tiempo radía el sonido al aire de la atmósfera. En realidad, el segundo generador es comúnmente altamente no lineal y el acoplamiento que forma con el primer resonador es tan fuerte que no pueden considerarse por separado. El acoplamiento de retroalimentación entre ambos es sumamente importante en el comportamiento del instrumento. Los modos del primer resonador son apreciablemente inarmónicos, como los instrumentos de madera y viento que poseen un resonador de tubo con huecos, con resonancias marcadamente inarmónicas

Para entender los efectos de no linealidad de los instrumentos musicales es necesario examinar el acoplamiento entre el generador y el resonador (de resistencia negativa) que mantiene las oscilaciones [19].

Las oscilaciones libres o propias del resonador están constituidas por la superposición de todos los modos normales $y_n(t)$, que cuando no tienen pérdidas (caso irreal), obedecen a la ecuación:

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \omega^2{}_n y_n = 0 \qquad (11)$$

cuya solución responde a expresiones perfectamente armónicas. Pero como siempre hay pérdidas (disipación de energía), la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \alpha_n \frac{dy_n}{dt} + \omega^2{}_n y_n = 0 \qquad (12)$$

donde $\omega_n$ son las frecuencias angulares de los "modos propios" y $\alpha_n$ son los coeficientes de amortiguamiento, producto de las pérdidas.

Desde luego, siempre debe de haber un generador que provoca las excitaciones forzadas de las vibraciones normales del resonador (por ejemplo, frotar la cuerda en un violín o martillarla en el caso del piano) y la ecuación se convierte en:

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + \alpha_n \frac{dy_n}{dt} + \omega_n{}^2 y_n = g(y_1, y_2, y_{3,\ldots\ldots}) \qquad (13)$$

donde $g(y_1, y_2, y_{3,\ldots\ldots})$ describe la excitación forzada del generador. Si suponemos que éste es lineal, podemos escrbir:

$$g(y_1, y_2, y_{3,\ldots\ldots}) = c_1(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots) + c_2(\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_3}{dt} + \ldots) \qquad (14)$$

Donde $C_1$ y $C_2$ son constantes, en una primera aproximación. Sin embargo, en los instrumentos reales el generador es no lineal.

Aunque, por razones de espacio, no podemos discutir las soluciones de la ecuación, vale la pena decir que el ingrediente no-lineal aporta términos forzados de combinaciones de frecuencias:

$$\omega_n \pm \omega_m \qquad (15)$$

Todo esto conduce al pensamiento de que los intervalos de frecuencia tan "exactos" relacionados ya sea con la formación del timbre o con los supuestos intervalos "justos" de las escalas o inclusive con las teorías, todas controvertidas, sobre la disonancia y la consonancia, en realidad representan un problema más complejo que lo que comúnmente se refleja en los textos sobre las bases de la música.

## EL DOMINIO FRECUENCIA -TIEMPO DE LA MÚSICA

Un análogo del principio de incertidumbre que se postula para las magnitudes de espacio-momento, se postula también para el dominio tiempo-frecuencia, lo que está relacionado con que el tiempo mínimo en que un timbre característico es audible está relacionado con la expresión [11]:

$$\Delta f\, \Delta t = \text{const.} \qquad (16)$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos un sonido perfectamente armónico (sinusoidal) y vamos disminuyendo su duración hasta llegar un momento en que la sinusoide logra realizar sólo unos pocos o ni siquiera un ciclo de sinusoide. En ese momento se pierde el sonido característico (timbre) de la señal original y se oye un "*click*".

En realidad la música, tanto en melodía como en acordes, está cambiando continuamente sus frecuencias fundamentales, pero además, en cualquier interpretación musical se superponen una gran cantidad de sonidos de distintos instrumentos musicales. Esto hace que la representación de la señal de audio de amplitud contra tiempo varíe rápidamente en forma complejísima, aunque el sistema oído – cerebro es capaz de "interpretarla". La transformada de Fourier de esta compleja señal nos da la composición espectral de la señal, de amplitud *vs.* frecuencia, o sea, armónicos e inarmónicos constitutivos de la señal analizada [20, 21].

Nótese que tenemos dos dominios separados al respecto, uno por síntesis (amplitud-tiempo) y otros por análisis de Fourier (amplitud – frecuencia). Pero en realidad la música se mueve en el dominio frecuencia-tiempo, donde en cada intervalo pequeño de tiempo cambia el oscilograma (espectro) de ese "momento". Eso ocasiona que la característica fundamental de localización de las componentes de las señales musicales estén en el dominio de tiempo y de la frecuencia. En este sentido la transformada de Fourier, adolece del defecto de que la información espectral que proporciona es global y por el propio principio expresado en (16), existe el compromiso entre la frecuencia y el tiempo, ya que si "clavamos" el tiempo ( $\Delta t = 0$ ), se pierde la información de las frecuencias y si lo hacemos muy "largo" (tendiente a infinito) entonces se definen bien las frecuencias, pero no se sabe en que momento "suena" cada una.

Por ello han aparecido nuevas técnicas para representar señales en el dominio de tiempo-frecuencia que utilizan otras transformadas, como las rápidas de Fourier, las de Gabor en 1946, o los wavelets, con la idea de introducir ventanas para poder observar la parte de la señal presente en algún entorno del punto de estudio [11]. Así se logra, en primer lugar, que las componentes frecuenciales de la señal en aquel instante dependan solamente de las proximidades del punto y no influyan en ellas las partes alejadas de la señal. A diferencia de la transformada de de Fourier, las transformadas de Wavelet, pueden definirse con diferentes expresiones, sean continuas o discretas, que permiten el análisis de señales de manera similar a la transformada de Fourier, pero con la diferencia que las de wavelet pueden entregar información temporal y frecuencial en forma casi-simultánea. El principio de incertidumbre impone limitaciones con la resolución en tiempo y frecuencia, pero estas transformadas wavelet permiten estudiar la señal a distintas frecuencias y con diferentes resoluciones. Una gran ventaja sobre la transformada de Fourier es que permiten trabajar con datos que presenten discontinuidades o picos, aspecto importante en señales digitalizadas. En general, poseen innumerables aplicaciones y en las asociadas con las sensaciones de la música en el cerebro, se podrían plantear problemas teóricos y mediciones experimentales de gran actualidad.

## CONCLUSIÓN

Cuba es una gran potencia musical en géneros de trascendencia mundial –habanera, boleros, danzón, son, conga, rumba, cha cha cha, mambo, etc.– pero no lo es tanto desde el punto de vista científico-técnico. Pongamos los físicos un granito de arena. Dejamos pendiente debatir por dónde andan aún hoy los "misterios", que prometen interesantes investigaciones al respecto. Queda abierta la partida.


[1] P.A.Scholes, *Diccionario Oxford de la Música* (Arte y Literatura, La Habana, 1981).

[2] M. Rosental, P.Iudin, *Diccionario filosófico* (Ediciones Universal, Argentina, 1973).

[3] B.I. Spasski, *Historia de la Física* (en ruso) (Universidad de Moscú, Moscú, 1963)

[4] B. Bower, Science News **153**, 215 (1998).

[5] J. Valenzuela, *Descubriendo MIDI* (Miller Freeman Books, San Francisco, 1995).

[6] M. Puckette, *Theory and Techniques of Electronic Music* (Univ. of California, San Diego, 2003).

[7] J. Jeans, *Science and Music* (Cambridge University Press, London, 1953).

[8] A. Wood, *The Physics of music*, 6th ed. (Methuen & Co., London, 1964).

[9] J. Askill, *Physics of Musical Sound* (Van Nostrand, New York, 1979).

[10] H.Massman y R. Ferrer, *Instrumentos Musicales* (Ediciones Dolmen, Santiago de Chile, 1997).

[11] D. Stolik, *Física y Música* (Editora Citmatel, La Habana, 2005).

[12] D. Stolik, Rev. Cub. Fis. **22**, 164 (2005).

[13] D. Stolik, Revista 100cias@uned, **1**, 83 (2008).

[14] W.F. Magie, *A Source Book in Physics* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1969).

[15] W.C.Sabine, *Collected Papers on Acoustisc* (Dover, 1964).

[16] D. Halliday, R.Resnick y K.S.Krane, *Física, 4ta ed.* (versión Ampliada) (Ed. Revolucionaria, 1992).

[17] Stevens y Warshofsky, *Sonido y Audición* (Time Inc., Mex. D.F., 1971).

[18] G. Bekesy, *Experiments in Hearing* (McGraw-Hill, New York, 1960).

[19] N.H.Fletcher, Rep.Prog. Phys. **62**, 723 (1999).

[20] M. Dörfler, *What Time-Frequency Analysis Can Do to Music Signals* (NuHAG, Institut für Mathematik, Univ. Wien, 2004).

[21] J.M.Vuletich, *Nuevas bases para el procesamiento de música en el dominio de tiempo-frecuencia*. (Dto de Computación., Fac.de Ciencias Exactas y Nat. Univ. de Buenos Aires, 2005)