ACERCA DE UN ANÁLOGO TRIDIMENSIONAL DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY Y SU APLICACIÓN A LA ELECTROSTÁTICA

ON A TRIDIMENSIONAL ANALOGUE OF CAUCHY INTEGRAL FORMULA AND ITS APPLICATION TO ELECTROSTATICS

R. Ávila Ávila[a†], R. Abreu Blaya[a] y J. Bory Reyes[b]

a) Departamento Licenciatura en Matemática, Universidad de Holguín, Cuba; ravilaa@facinf.uho.edu.cu †.
b) Departamento de Matemática, Universidad de Oriente, Cuba.

Palabras clave: Cuaterniones, electrostática, Fórmula Integral de Cauchy

Una de las primeras investigaciones sobre la generalización de los resultados del análisis complejo a dimensiones superiores se debe a los matemáticos rumanos G.C. Moisil y N. Theodorescu [1], pioneros en abordar el tema a partir de un enfoque cuaterniónico.

El desarrollo ulterior de la teoría recibió un impulso en los trabajos de A. B. Bizadze [2, 3] que profundizaron en los análogos del sistema de Cauchy Riemann en el espacio tridimensional euclídeo. La aproximación cuaterniónica permite profundizar en una serie de propiedades de las integrales referidas, de gran utilidad desde el punto de vista teórico y en sus aplicaciones [4].

Los análogos tridimensionales de las integrales de Cauchy en forma vectorial, ofrecen una escritura relativamente cómoda y más familiar en aplicaciones físicas, facilitando su extensión natural a cualquier campo físico vectorial laplaceano. Su deducción a partir operaciones usuales tratadas en el álgebra y el análisis vectorial [5], sugiere una vía general de aplicación para calcular la intensidad de campos en dominios volumétricos acotados por ciertas superficies cerradas suaves.

Es conocido que si Γ es una curva suave en el plano de la variable compleja z, D^+ constituye el dominio encerrado por la curva dada (dominio interior), D^- el dominio complementario o dominio exterior y F(z) es una función analítica en D^+ y continua en $D^+ + \Gamma$, entonces es válida la fórmula integral de Cauchy.

Brackx, Delanghe and Sommen [5] aplicaron ampliamente el enfoque cuaterniónico y su relación con las propiedades de las integrales del tipo Cauchy en un contexto más generalizado y conceptualizado como Análisis de Clifford.
Sea u una función cuaterniónica definida en cierto dominio $\Omega \in R^3$ y que toma valores en $H(R)$, tal que ella sólo es función de cuaterniones puramente imaginarios (vectores):

$$u(\underline{x}) = u_o(\underline{x}) + \underline{u}(\underline{x}) \tag{1}$$

Si la función es hiperholomorfa [6], satisface el sistema de Moisil-Theodorescu:

$$\begin{aligned}\underline{\partial}(u(\underline{x})) &= \underline{\partial}(u_o(\underline{x}) + \underline{u}(\underline{x})) = \\ &= -div(\underline{u}) + grad(u_o) + rot(\underline{u}) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que las funciones vectoriales usuales constituyen un caso especial de funciones cuaterniónicas y de hecho sus partes escalares son nulas, y remplazando el operador de Moisil-Theodorescu por el operador nabla habitual $\vec{x}$, aplicando la definición de producto cuaterniónico, el sistema (2) resulta:

$$\begin{cases}\nabla \, . \, \vec{F} = 0 \\ \nabla \times \vec{F} = 0\end{cases} \tag{3}$$

Las expresiones obtenidas son típicas para aquellos campos vectoriales en R^3 denominados en una terminología más familiar, campos solenoidales y potenciales (irrotacionales).

Si se denota q(x) como función satisface (2), tal y como se deduce [3] se obtiene el análogo tridimensional de la Fórmula Integral de Cauchy de la teoría de funciones de una variable compleja en la forma:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(x,y)q(y)ds_y = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega^+ \\ 0, & x \in \Omega^- \end{cases} \tag{4}$$

Los vectores x, y considerados pertenecen a R^3, M es un operador diferencial matricial, Ω^+ cierto dominio acotado por una superficie suave y Ω^- el dominio exterior. La fórmula (4) es equivalente a la deducida en [4] y cuyo aspecto es:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla \frac{1}{\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|} n\ v\ dS = \begin{cases} f(\underline{x}'), & \underline{x}' \in D \\ 0 & \underline{x}' \notin D \end{cases} \tag{5}$$

Las x subrayadas representan vectores de R^3, D es el dominio Ω^+ de R^3 y el producto indicado con un asterisco representa el producto cuaterniónico. En el caso de funciones cuaterniónicas monogénicas completamente imaginarias simbolizadas por F (campos vectoriales tridimensionales laplaceanos), la expresión (5) se convierte en la obtenida en [7]:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\vec{F}\left(\frac{\vec{r}}{\vec{r}^3}\cdot \vec{n} \right) + \frac{\vec{r}}{\vec{r}^3}(\vec{F}\cdot\vec{n}) - (\vec{F}\cdot\frac{\vec{r}}{\vec{r}^3})\vec{n} \right] dS = \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}'), & \vec{r}' \in D \\ 0 & \vec{r}' \notin D \end{cases} \tag{7}$$

Sea un volumen acotado por cierta superficie cerrada suave y relleno con un material dieléctrico con determinado valor de la polarización (se considera nula la densidad volumétrica de carga libre). El campo debido a las cargas de polarización que aparecen en la superficie de separación del dieléctrico y distribuidas con cierta densidad superficial es un campo vectorial laplaceano [7] y satisface la expresión (6). Aplicando además la relación entre las funciones vectoriales desplazamiento eléctrico, la polarización y y el campo eléctrico para dieléctricos lineales e isótropos así como las condiciones de frontera que satisfacen las componentes tangenciales del campo eléctrico y las normales del desplazamiento eléctrico, se obtiene la expresión:

$$\vec{E}(P) = -\nabla\phi(P) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_S (\vec{P}\cdot\vec{n})\frac{\vec{r}}{r^3}\ dS \tag{7}$$

Así a la intensidad del campo electrostático en el punto P contribuyen la carga de polarización distribuida por todo el volumen del dieléctrico y la carga de polarización distribuida por toda la superficie que lo separa del medio exterior. Si las cargas de polarización estén ausentes:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint_S (\vec{P}\cdot\vec{n})\frac{\vec{r}}{r^3}\ dS \tag{8}$$

Para los campos vectoriales laplacianos electrostáticos, se obtiene una fórmula que permite calcular el campo en el interior de un volumen acotado de un dieléctrico por una superficie suave y que refleja el hecho físico asociado a las cargas de polarización como fuente de campo complementario.

[1] G.C. Moisil, N. Theodorescu, Functions holomorphes dans l'space, Mathematic (cluj), 5, 142-159 (1931).

[2] A.V. Bisadze, Spatial analog of the Cauchy Type Integral and some of its applications. Izvestia Akademii Nauk, SSSR, seria Matematicheskaia, vol. 17, No. 6, 525-538 (1953).

[3] Д.В Бицадзе, Основы Теории Аналитичеескихих Функций Комплексного Переменного (Издателство Наука, Москва, 1969).

[4] Н.А Васиилевский, М.С Жданов, М. В Шапиро, Пространственные аналогии Интеграла Типа Коши и Теории Кватернионов. В Препринт No. 48 (737) Академия Наук СССР, Москва (1987).

[5] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen, Clifford Analysis (Pitman, London, 1982).

[6] R. Abreu Blaya; J Bory Reyes; M. Shapiro. On the Laplacian vector field theory in domains with rectifiable boundary. Math. Methods Appl. Sci.,Vol. 29, No. 15, 1861-1881, (2006).

[7] A. Nicolaide, Three-Dimensional Analog of the Cauchy Integral Formula for Solving Magnetic Fields Problems. IEEE Transactions in magnetic, vol. 34, No. 3, May (1998).