

UN MODELO DE LA SUBIDA DEL AIRE OCASIONADA POR LA CONDENSACIÓN DEL VAPOR Y SU CÁLCULO NUMÉRICO

A MODEL OF THE AIR RISE CAUSED BY THE WATER VAPOR CONDENSATION AND ITS NUMERICAL COMPUTATION

S. GHOMRANI^{a*}, J. MARÍN ANTUÑA^{b†} Y H. FUJITA YASHIMA^{a†}

a) Laboratoire de Math. Appl. Modélisation, Université de Guelma, Algérie. sarra.ghomrani@hotmail.fr*, hisao.fujitayashima@unito.it†

b) Facultad de Física, Universidad de La Habana, Cuba. marin@fisica.uh.cu†

† autor para la correspondencia

Recibido 16/10/2014; Aceptado 26/12/2014

Se propone un sistema de ecuaciones que describe el desarrollo de la subida del aire ocasionada por el calor latente de la condensación del vapor de agua en un cilindro vertical de unos 10 km de altura. El resultado del cálculo muestra un desarrollo muy rápido de la corriente ascendente y su estabilización por efecto de la fricción de las gotitas producidas por la condensación del vapor de agua en el aire.

We propose a system of equations to describe the development of the air rise caused by the water vapor condensation latent heat in a vertical cylinder of 10 km of height. The calculus results show a very fast development of the rising flow and its stabilization due to the friction of the droplets given by the water vapor condensation in the air.

PACS: Atmosphere: pressure, density and temperature, 92.60.hv; Water in the atmosphere, 92.60.Jq; Storms, 92.60.Qx; Partial differential equations, 02.30.Jr; Fluid dynamics: finite difference methods, 47.11.Bc

I INTRODUCCIÓN

Como es bien conocido, la subida del aire ocasionada por el calor latente de la condensación del vapor de agua juega un papel fundamental en los fenómenos de la torre cálida, formando el cúmulo nimbo y provocando la tormenta y la precipitación intensa o convirtiéndose en el núcleo cálido del huracán (véanse por ejemplo [1], [2], entre otros). La mayoría de los trabajos sobre tormentas tropicales desarrollan modelos que estudian los sistemas ya con cierto grado de madurez, lo que es posible ver en trabajos tales como [3], [4], [5], [6] entre otros. La literatura en este tema es muy amplia, pero no abundan los trabajos que desarrollen con suficiente amplitud la fase inicial de formación de las tormentas tropicales. En el presente trabajo proponemos un sistema de ecuaciones que describe el desarrollo del movimiento ascendente del aire ocasionado por el calor latente de la condensación del vapor de agua, suponiendo que el movimiento del aire se desarrolla en un cilindro vertical elevado. Naturalmente, en la naturaleza no existe una estructura análoga, sino solamente en nuestra imaginación podemos construir una chimenea de unos 10 kilómetros de altura. Aunque sea un experimento puramente virtual, para comprender el aspecto esencial del fenómeno, nos parece útil analizar este modelo de la subida del aire. En efecto, gracias a la simplicidad de la estructura geométrica del cilindro vertical, podemos calcular bastante bien el desarrollo del flujo vertical del aire, incluyendo la estabilización por el efecto de la fricción de las gotitas producidas por la salida del aire húmedo.

Para el cálculo hemos utilizado una aproximación para la separación del sistema de ecuaciones en una parte que

describe el desarrollo en el tiempo t y la que determina la estructura espacial como una estructura casi estacionaria. Esta separación nos permite utilizar un esquema de diferencias finitas bastante simple, que da un resultado claro.

II ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL AIRE CON LA CONDENSACIÓN DEL VAPOR DE AGUA

Como decíamos arriba, proponemos la descripción del desarrollo de la corriente vertical del aire por el calor latente de la condensación, corriente en un cilindro vertical muy elevado. Imaginemos una "chimenea" de unos 10 kilómetros, que es un cilindro regular con una sección constante y bastante ancha, por ejemplo con un diámetro entre 1 y 2 kilómetros (como en muchos casos de chubascos), y en ella una corriente ascendente del aire húmedo que provoca la condensación del vapor como en una "torre cálida". La presencia de la pared de la chimenea, o la inhomogeneidad de la condición inicial, podría provocar una no uniformidad de la velocidad en distintos valores de la altura. Pero, dado que la pared es paralela a la corriente principal, si el flujo entrante es uniforme, el movimiento irregular en el flujo se reduce a él en la capa límite, cuyo espesor se disminuye en función de la pequeñez de la viscosidad (véase por ejemplo [7], cap. IV). Por eso, en este trabajo, que trata una corriente del aire con viscosidad muy pequeña en un cilindro muy ancho sin obstáculos, despreciamos la inhomogeneidad que se puede crear en la vecindad de la pared y estudiaremos los aspectos de la corriente principal en el cilindro. Es decir, para formular las ecuaciones, despreciando las componentes horizontales de la velocidad y las variaciones de las magnitudes físicas

en las direcciones horizontales, consideraremos solamente la componente de la velocidad $v = v_3$ y solamente la variable vertical z como coordenada espacial, de manera que las ecuaciones se considerarán en el dominio

$$0 < z < \bar{z}_1, \quad t > 0,$$

donde \bar{z}_1 representará la altura del cilindro.

Para formular las ecuaciones, partimos desde las ecuaciones en derivadas parciales de la mecánica de los fluidos (véase por ejemplo [7]) y les añadimos los términos debidos a la transición de fase del agua. Denotemos por $H_{tr} = H_{tr}(x, t)$ la cantidad de H_2O en estado gaseoso que se transforma en líquido o sólido, por L_{tr} el calor latente y por $\Sigma = \Sigma(x, t)$ la cantidad de agua líquida o sólida presente en el aire (en la forma de gotitas o pedazos de hielo).

Reduciendo las ecuaciones a una dimensión espacial, tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = -H_{tr}, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} p - g[\Sigma + \rho], \quad (2)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p \frac{\partial v}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + L_{tr} H_{tr}, \quad (3)$$

donde μ y κ son el coeficiente de viscosidad y el de conductividad térmica.

Si además ponemos

$$p = R_1 \rho T \quad (4)$$

como en el caso del gas ideal, y si sustituimos (4) en (3), tenemos

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) + R_1 \rho T \frac{\partial v}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + L_{tr} H_{tr}. \quad (5)$$

Si además sustituimos

$$\rho \partial_z v = -\partial_t \rho - v \partial_z \rho - H_{tr}$$

(que resulta de (1)) en (5), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \\ = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ahora determinamos la cantidad H_{tr} como sigue. Denotemos por $\bar{\pi}_{vs}(T)$ la densidad del vapor saturado (que podemos considerar como una función de la temperatura T). Supongamos que la cantidad de H_2O que sobrepasa $\bar{\pi}_{vs}(T)$ se convierte inmediatamente en líquido o sólido. Entonces, si denotamos por $\pi(z)$ la densidad del vapor en el punto z ,

considerando la temperatura T como función de z , en cada punto z tenemos

$$\pi(z) = \bar{\pi}_{vs}(T(z)).$$

Cuando el aire sube de Δz , la cantidad de H_2O que estaba en estado gaseoso en el punto z será, en la unidad de volumen, aproximadamente

$$\pi(z) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} = \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)},$$

mientras que la densidad del vapor saturado será

$$\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z)).$$

Por eso, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\pi(z) \frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} - \bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z)) \right] \\ = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\bar{\pi}_{vs}(T(z)) \left(\frac{\rho(z + \Delta z)}{\rho(z)} - 1 \right) \right. \\ \left. - \left(\bar{\pi}_{vs}(T(z + \Delta z)) - \bar{\pi}_{vs}(T(z)) \right) \right] \\ = \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo cuenta de la relación $\frac{dz}{dt} = v$, podemos poner

$$H_{tr} = \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v. \quad (7)$$

Ahora volvamos a la ecuación (2), para la cual hasta ahora no hemos comentado las condiciones en los extremos del dominio $0 < z < \bar{z}_1$. Como se ve por el cálculo, dentro de la chimenea hay un aire más caliente que en el exterior y por eso también la presión es más grande que la del exterior. Más precisamente, si en el nivel $z = 0$, la presión en la chimenea es igual a la del exterior, en la cima $z = \bar{z}_1$ habrá una diferencia de presión entre el interior y el exterior; en esta situación el aire que sale desde la cima de la chimenea se extendería muy rápidamente y la presión se reduciría al nivel de la presión del exterior. Si traducimos este efecto en el modelo del movimiento del aire dentro de la chimenea, podemos considerarlo como una fuerza f , que, en el dominio $0 < z < \bar{z}_1$, correspondería al gradiente de presión de base creado por la condición del exterior. Por eso, si denotamos por p_{ex} la presión del exterior y si, de acuerdo con (4), consideramos que la presión en la cima $p(t, \bar{z}_1)$ es igual a $R_1 \rho(t, \bar{z}_1) T(t, \bar{z}_1)$, la función $f = f(t, z)$ tiene que satisfacer la relación

$$\int_0^{\bar{z}_1} f(t, z) dz = R_1 \rho(t, \bar{z}_1) T(t, \bar{z}_1) - p_{ex}. \quad (8)$$

Como en nuestro modelo no hay elementos para determinar una distribución particular de f en $0 < z < \bar{z}_1$, aquí consideramos una distribución casi homogénea (para la aproximación de f para el cálculo, véase (17)). Así añadimos el término f a la parte derecha de (2), en la cual sustituimos también (4).

Resumiendo, el sistema de ecuaciones que tenemos que considerar es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = -H_{tr}, \quad (9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) &= \\ = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde H_{tr} es dado por (7).

Si despreciamos la viscosidad y la conductividad térmica, las ecuaciones (10) y (11) se reducen a

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f, \quad (12)$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - R_1 T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = (R_1 T + L_{tr}) H_{tr}. \quad (13)$$

III SEPARACIÓN DE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL Y DE LA ESTRUCTURA VERTICAL Y OTRAS APROXIMACIONES

No es fácil resolver el sistema de ecuaciones (9)-(11) con (7) y con Σ que tenemos que definir todavía. Por eso, antes de todo introducimos una aproximación particular, que es la separación de la evolución temporal y de la estructura vertical. Pongamos

$$v = \alpha(t)w(t, z) \quad (14)$$

y supongamos que

$$\partial_t \rho(t, z) \approx 0, \quad \partial_t T(t, z) \approx 0, \quad \partial_t w(t, z) \approx 0. \quad (15)$$

La hipótesis (15) significa que se supone que, fijando $\alpha(t)$, es decir, una vez fijada la magnitud característica α de la velocidad, la densidad, la temperatura y la velocidad deben constituir un estado casi estacionario; en efecto el sistema (20), (23), (24) (véase abajo) puede representar el estado hidrostático con condensación del vapor y con efecto de la caída de gotitas.

Con las aproximaciones (14)-(15) la ecuación (10) se convierte en

$$\rho w \frac{d}{dt} \alpha + \rho \alpha^2 w \partial_z w = \mu \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho] + f. \quad (16)$$

Por otra parte, nos es conveniente adoptar la aproximación de $f(t, z)$ dada por

$$f(t, z) = \rho(t, z)w(t, z) \frac{p(t, \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t, z')w(t, z')dz'}. \quad (17)$$

Se ve que esta función $f(t, z)$ satisface (8) y se verá también que, dado que la variación en z de $\rho(t, z)w(t, z)$ es bastante pequeña, la de $f(t, z)$ será también pequeña. Sustituyendo (17) en (16), tenemos

$$\begin{aligned} \rho w \frac{d}{dt} \alpha + \rho \alpha^2 w \partial_z w &= \\ = \mu \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho] + \rho w \frac{p(t, \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t, z')w(t, z')dz'}, \end{aligned}$$

o sea, la ecuación (16) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{p(t, \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t, z')w(t, z')dz'},$$

$$\rho \alpha^2 w \partial_z w = \mu \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - R_1 \frac{\partial}{\partial z}(\rho T) - g[\Sigma + \rho].$$

En lo que concierne a $\Sigma(t, z)$, su estimación resulta muy difícil; nos parece que es casi imposible determinarla por una deducción teórica. Esperando los datos de observación con que se definirá $\Sigma(t, z)$ de manera más coherente físicamente, en el presente experimento numérico, vamos a utilizar la aproximación

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} H_{tr}(z, s) dz ds \\ &= \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) v dz ds \end{aligned} \quad (18)$$

con una función conveniente φ , que representaría la probabilidad de gotitas o de pedazos de hielo de quedar en el aire. En efecto, si $\varphi(t-s)$ es la probabilidad de quedar en el dominio $0 < z < \bar{z}_1$ del agua líquida o sólida producida en el momento s , la cantidad $\Sigma(t)$ definida por (18) será el promedio (en $0 < z < \bar{z}_1$) de la masa total del agua líquida o sólida presente en el aire en el momento t .

Por fin interpretando (15) como la posibilidad de considerar las funciones ρ, T, w como funciones de z con un parámetro t , escribimos $\rho(t; z), T(t; z), w(t; z)$ y también $\frac{d\rho}{dz}, \frac{dT}{dz}, \frac{dw}{dz}$ en lugar de $\frac{\partial \rho}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$. Así el problema se convierte en

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{R_1 \rho(t; \bar{z}_1) T(t; \bar{z}_1) - p_{ex}}{\int_0^{\bar{z}_1} \rho(t; z') w(t; z') dz'}, \quad (19)$$

$$w \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dw}{dz} = - \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) w, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \rho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\rho}{dz} - \frac{\kappa}{\alpha(t)w} \frac{d^2 T}{dz^2} &= \frac{\mu \alpha(t)}{w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \\ + (R_1 T + L_{gl}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \rho - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} T \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\alpha(t)^2 \rho w \frac{dw}{dz} + R_1 \rho \frac{dT}{dz} + R_1 T \frac{d\rho}{dz} - \mu \alpha(t) \frac{d^2 w}{dz^2} = -g\rho$$

$$- g \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) \alpha w dz ds. \quad (22)$$

Ya que nos interesa el desarrollo del corriente ascendente del aire, consideramos sólo el caso en que $v = \alpha w$ es positiva y no es demasiado pequeña (de manera que en (21) $\frac{\kappa}{\alpha(t)w}$ queda relativamente pequeño).

Si despreciamos la viscosidad y la conductividad térmica, las ecuaciones (21) y (22) se reducen a

$$\rho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\rho}{dz} = (R_1 T + L_{gl}) \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \rho - \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} T \right), \quad (23)$$

$$\alpha(t)^2 \rho w \frac{dw}{dz} + R_1 \rho \frac{dT}{dz} + R_1 T \frac{d\rho}{dz} = -g\rho - g \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^t \varphi(t-s) \times \int_0^{\bar{z}_1} \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \right) \alpha w dz ds. \quad (24)$$

IV ELECCIÓN DE PARÁMETROS Y ESQUEMA NUMÉRICO

Para efectuar el cálculo, tenemos que precisar algunos parámetros que intervienen en las ecuaciones. Los parámetros físicos g , R_1 , c_v son

$$g = 9.8 \text{ gm}^2/\text{s}^2, \quad R_1 = \frac{R}{\mu_m}, \quad c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu_m},$$

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg/mol} \cdot K, \quad \mu_m = 28,96 \text{ g/mol}.$$

En el cálculo utilizamos para la densidad del vapor saturado $\bar{\pi}_{vs}(T)$ su valor relativo a la superficie líquida

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{\mu_h}{RT} E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}},$$

$$\mu_h = 18,01 \text{ (g/mol)}, \quad E_0 = 6,107 \text{ (mbar)},$$

y para el calor latente L_{tr} su valor relativo a la transición gas-líquido

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T) 10^3 \quad (\text{J/kg}).$$

La corrección de estas funciones por la consideración de la presencia de la transición de fase gas-sólido requiere cálculos bastante complicados pero no modificará mucho el resultado del cálculo (para estos coeficientes véanse por ejemplo [8], [9], [10], [11]). Para el coeficiente de viscosidad y el de conductividad térmica, véanse comentarios detrás de la Fig. 5 en bajo.

Para la presión en el exterior p_{ex} en la cima, en el ejemplo de simulación de este trabajo, utilizamos

$$p_{ex} = R_1 \rho_{sc}(\bar{z}_1) T_{sc}(\bar{z}_1),$$

donde $T_{sc}(z)$ y $\rho_{sc}(z)$ son las funciones de la temperatura y de la densidad del aire en el estado hidrostático (sin condensación), es decir

$$T_{sc}(z) = T(0) - \frac{g(\gamma-1)}{R_1 \gamma} z, \quad \frac{g(\gamma-1)}{R_1 \gamma} \approx 9,8 \text{ }^\circ\text{K/km},$$

$$\rho_{sc}(z) = \left(\rho(0)^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma h} g z \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\gamma = \frac{R_1 + c_v}{c_v} \quad (\gamma \text{ es el exponente adiabático}),$$

$$h = \text{constante} = \frac{(R_1 T(0))^\gamma}{\bar{p}_0^{\gamma-1}}, \quad \bar{p}_0 = 1013 \text{ mb}.$$

En lo que concierne a la función $\varphi(\cdot)$, en nuestro ejemplo de cálculo proponemos

$$\varphi(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi \tau^2}{4(1200)^2}\right), \quad \tau \geq 0.$$

Dado que $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi \tau^2}{4(1200)^2}\right) d\tau = 1200$, la elección de esta función corresponde a la estimación de que el promedio del tiempo de permanencia de gotitas o pedazos de hielo en el aire sea 20 minutos (= 1200 segundos).

Para realizar la simulación de un caso, escogemos

$$0 \leq z \leq 12000 \text{ (m)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ (s)},$$

$$\alpha(0) = 0.01 \text{ (m/s)}, \quad T(t; 0) = 300 \text{ (K)},$$

$$\rho(t; 0) = 1204 \text{ (g/m}^3\text{)}, \quad w(t; 0) = 1.$$

Para construir el esquema numérico, discretizamos los intervalos $0 \leq t \leq \bar{t}_1 = 2000$ (s) y $0 \leq z \leq \bar{z}_1 = 12000$ (m) por $\{t_i\}_{i=0}^{N_1}$ y $\{z_j\}_{j=0}^{N_2}$ con pasos δ_t y δ_z , es decir

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_1-1} < t_{N_1} = \bar{t}_1,$$

$$t_i - t_{i-1} = \delta_t \quad \forall i \in \{1, \dots, N_1\}, \quad (25)$$

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{N_2-1} < z_{N_2} = \bar{z}_1,$$

$$z_j - z_{j-1} = \delta_z \quad \forall j \in \{1, \dots, N_2\}. \quad (26)$$

Con la discretización del dominio (25) y (26) proponemos un esquema de diferencias finitas para las ecuaciones (19), (20), (23), (24). En efecto, cuando tenemos los valores de $w(t_i; z_j)$, $\rho(t_i; z_j)$, $T(t_i; z_j)$ y $\alpha(t_{i-1})$ ($i' = 1, \dots, i-1$, $j = 1, \dots, N_2$), podemos determinar los valores de $\alpha(t_i)$ y $\Sigma(t_i)$ por las ecuaciones

$$\alpha(t_i) = \alpha(t_{i-1}) + \delta_t \frac{R_1 \rho(t_{i-1}; \bar{z}_1) T(t_{i-1}; \bar{z}_1) - p_{ex}}{\delta_z \sum_{j=1}^{N_2} \rho(t_{i-1}; z_j) w(t_{i-1}; z_j)}, \quad (27)$$

$$\Sigma(t_i) = \frac{1}{z_1} \delta_t \sum_{i'=1}^{i-1} \varphi(t_i - t_{i'}) \alpha(t_{i'}) \delta z$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_2} (D_1(i', j) - D_2(i', j)) w(t_{i'}; z_j), \quad (28)$$

$$D_1(i', j) = \frac{\bar{\pi}_{vs}(T(t_{i'}; z_j))}{\rho(t_{i'}; z_{j-1})} (\rho(t_{i'}; z_j) - \rho(t_{i'}; z_{j-1})),$$

$$D_2(i', j) = \frac{d\bar{\pi}_{vs}(T)}{dT}(t_{i'}; z_j) (T(t_{i'}; z_j) - T(t_{i'}; z_{j-1})).$$

Después, cuando tenemos los valores de $\alpha(t_i)$, $\Sigma(t_i)$, $w(t_i; z_{j-1})$, $\rho(t_i; z_{j-1})$, $T(t_i; z_{j-1})$, podemos determinar los valores de $w(t_i; z_j)$, $\rho(t_i; z_j)$, $T(t_i; z_j)$ por las ecuaciones

$$w(t_i; z_{j-1}) \rho(t_i; z_j) + \rho(t_i; z_{j-1}) w(t_i; z_j)$$

$$= 2w(t_i; z_{j-1}) \rho(t_i; z_{j-1}) - (D_1(i, j) - D_2(i, j)) w(t_i; z_{j-1}), \quad (29)$$

$$\rho(t_i; z_{j-1}) c_v T(t_i; z_j) - R_1 T(t_i; z_{j-1}) \rho(t_i; z_j)$$

$$= \rho(t_i; z_{j-1}) c_v T(t_i; z_{j-1}) - R_1 T(t_i; z_{j-1}) \rho(t_i; z_{j-1})$$

$$+ \delta_z (R_1 T(t_i; z_{j-1}) + L_{tr}) (D_1(i, j) - D_2(i, j)), \quad (30)$$

$$\alpha(t_i)^2 \rho w(t_i; z_{j-1}) w(t_i; z_j) + R_1 \rho(t_i; z_{j-1}) T(t_i; z_j)$$

$$+ R_1 T(t_i; z_{j-1}) \rho(t_i; z_j) = \alpha(t_i)^2 \rho w(t_i; z_{j-1}) w(t_i; z_{j-1})$$

$$+ 2R_1 \rho(t_i; z_{j-1}) T(t_i; z_{j-1}) - \delta_z g \rho(t_i; z_{j-1}) - \delta_z g \Sigma(t_i); \quad (31)$$

en (29) y (30), $D_1(i, j)$ y $D_2(i, j)$ son como en (28) (evidentemente sustituyendo i en lugar de i').

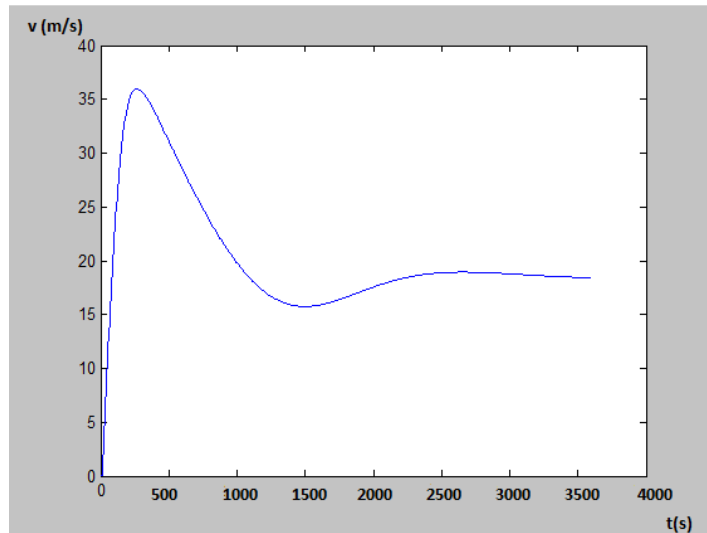


Figura 1. Desarrollo de la velocidad en el punto $z = 0$; la velocidad se indica en el eje vertical con la unidad m/s , mientras el eje horizontal indica el tiempo con la unidad s .

V RESULTADO DEL CÁLCULO

El resultado del cálculo es ilustrado en las figuras. Las Figuras 1-4 conciernen al caso sin viscosidad y sin

conductividad térmica, mientras que la Fig. 5 ilustra el desarrollo de la velocidad en el punto $z = 0$ en el caso en que en el cálculo se tiene en cuenta la viscosidad y la conductividad térmica.

En la Fig. 1 se ve la velocidad máxima alrededor de 4 minutos 10 segundos con el valor de $36 m/s$; después cae hasta alrededor de $16 m/s$ por el efecto de fricción de la precipitación, y más tarde se estabiliza alrededor del valor de $18 m/s$.

En las figuras siguientes, Figs. 2, 3 y 4, se ilustran la distribución vertical de la temperatura T , la de la densidad ρ y de la velocidad $v = \alpha w$ en el momento $t = 3600 s$, es decir, cuando el proceso se convierte en casi estacionario.

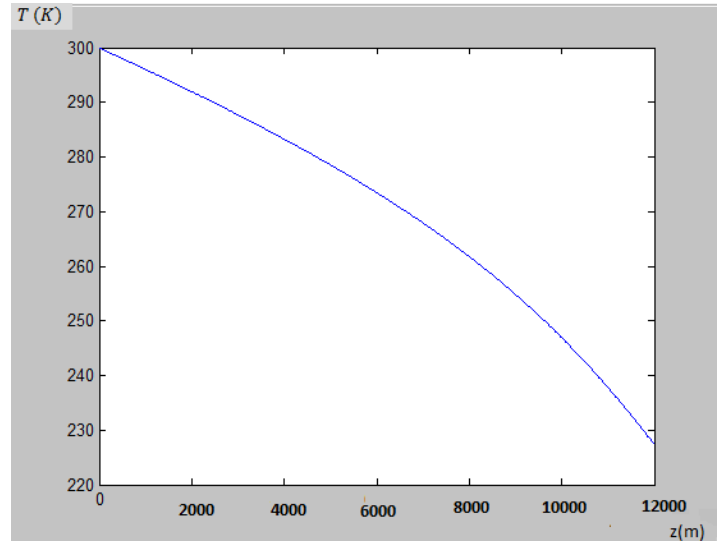


Figura 2. Distribución vertical de la temperatura T en el momento $t = 3600 s$; el eje horizontal indica la altura con la unidad m .

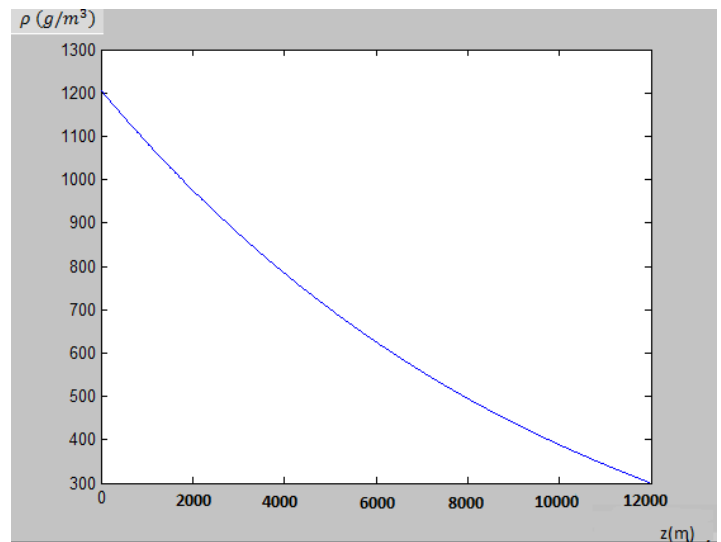


Figura 3. Distribución vertical de la densidad ρ en el momento $t = 3600 s$; el eje horizontal indica la altura con la unidad m .

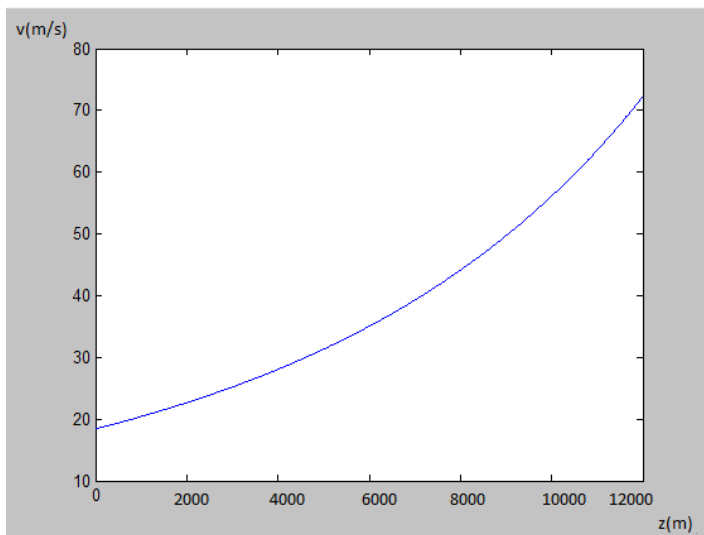


Figura 4. Distribución vertical de la velocidad $v = \alpha w$ en el momento $t = 3600$ s; el eje horizontal indica la altura con la unidad m .

El crecimiento de la velocidad según la altura que se ve en la Fig. 4 es debido a la hipótesis de la constancia de la sección del cilindro: en efecto, la velocidad crece de manera casi inversamente proporcional a la densidad.

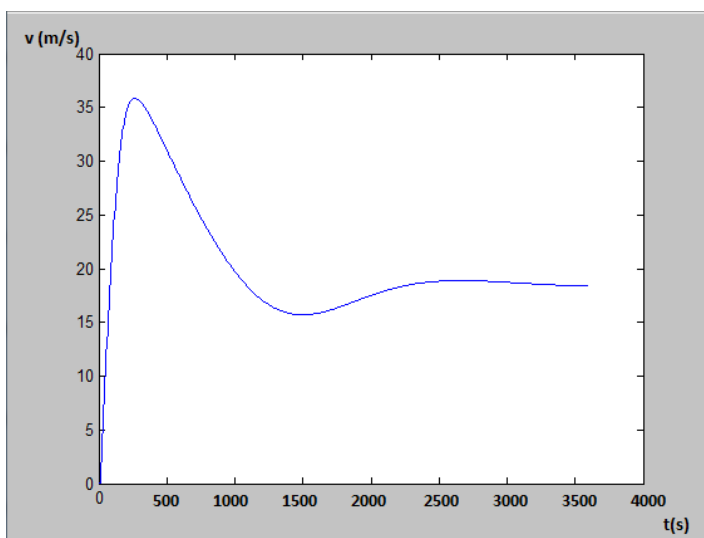


Figura 5. Desarrollo de la velocidad en el punto $z = 0$ por el sistema de ecuaciones con viscosidad y conductividad térmica.

La Fig. 5 se ha obtenido con el coeficiente de viscosidad $\mu = 1,66 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-2} g/s \cdot m$ y el de conductividad térmica $\kappa = 2,36 \cdot 10 g \cdot m/s^3 K$ (por eso el número de Prandtl sería 0,706), que corresponden a los valores relativos al nitrógeno N_2 (véase [8]). Se ve que el resultado para el caso con la viscosidad y la conductividad térmica no es sensiblemente diferente del caso sin viscosidad y sin conductividad térmica. Además, con pruebas de cálculo con otros valores de los coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica, hemos constatado también que el resultado es muy estable y no cambia sensiblemente por la elección de otros valores de estos parámetros. Si calculamos el número de Reynolds con la amplitud característica 12 km y con los valores escogidos, él se hace enorme (del orden de $2 \cdot 10^{14}$); pero por la

razón mencionada arriba, en este modelo a mesoescala no consideramos movimientos turbulentos en escala bastante más pequeña.

VI CONCLUSIONES

Aunque la estructura del cilindro vertical de 12 km de altura no sea natural, nos parece que el resultado de la simulación numérica muestra el aspecto fundamental de la evolución del flujo del aire húmedo con la condensación del vapor de la torre caliente: crecimiento rápido de la velocidad vertical del aire y su estabilización relativa por el efecto de fricción de gotitas y de pedazos de hielo. En esta simulación hemos utilizado algunas aproximaciones un poco arbitrarias como la de $\Sigma(t)$. Por eso necesitaremos buscar aproximaciones mejores para estas funciones y hacer otras simulaciones. Además la estabilización relativa del crecimiento de la velocidad vertical en este ejemplo es debida también al efecto del hecho de que la sección del cilindro vertical es constante, y, en general, el fenómeno en la naturaleza tiene una estructura más compleja, lo que modifica el comportamiento de su desarrollo. Por lo tanto, para modelar los fenómenos naturales, será necesario modificar la estructura geométrica del modelo e introducir otros efectos que tenemos que tener en cuenta.

VII AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestra gratitud al prof. Oscar Díaz Rodríguez del Instituto de Meteorología de La Habana, Cuba, por las discusiones de gran utilidad que sostuvimos con él relacionadas con nuestra investigación.

- [1] A. P. Khain, *Modelación matemática de los ciclones tropicales*, (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984).
- [2] W. Cotton, G. Bryan, S. van den Heever, *Storm and cloud dynamics*, II ed. (Academic Press, 2011)
- [3] R. A. Anthes, Rev. Geophys. Space Phys. **12**, 495 (1974).
- [4] P. G. Black, E. A. D' Asaro, W. M. Dennon, J. R. French, P. P. Niiler, T. B. Sanford, E. J. Terrill, E. J. Walsh and J. A. Zhang, Bull. Am. Meteorol. Soc. **88**, 357 (2007).
- [5] K. A. Emanuel, J. Atmos. Sci. **43**, 585 (1986).
- [6] M. Ojeda Figueroa, "Modelo para el cálculo de intensidad potencial de ciclones tropicales. Tesis de licenciatura en Meteorología". InSTEC, La Habana, Cuba, 2011.
- [7] L. L. Landau, and E. M. Lifchitz, *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)*, (Mir, Moscou, 1989).
- [8] A. K. Kikoïne, I. K. Kikoïne, *Physique moléculaire*, (Mir, Moscou, 1979).
- [9] L. T. Matveev, *Física de la atmósfera*, (Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 2000)
- [10] F. Prodi, A. Battaglia, *Meteorologia - Parte II, Microfisica*, (Grafica Pucci, Roma, 2004)
- [11] P.-X. Sheng, J. -T. Mao, J.-G. Li, A.-C. Zhang, J.-G. Sang, N.-X. Pan, *Física de la atmósfera*, (Publ. Univ. Pekín, Pekín, 2003).