EFECTO UNRUH EN UN CAMPO ESTOCÁSTICO DE VACÍO

ON THE UNRUH EFFECT OF A STOCHASTIC FIELD OF VACUUM

A. González-Lezcano[a] y A. Cabo-Montes de Oca[b†]

a) Departamento de Física, Universidad de Pinar del Río
b) Instituto Cibernética, Matemáticas y Física, La Habana. cabo@icimaf.cu[†]
† corresponding author

Recibido 10/10/2015; Aceptado 10/11/2015

Se deduce la ocurrencia del efecto Unruh o Radiación de Hawking considerando al espacio ocupado por un campo estocástico de vacío clásico. Las propiedades de simetría de este campo permiten deducir la forma funcional adecuada del espectro para llegar a un resultado en completo acuerdo con la Teoría Cuántica de campos. La ruptura de esta simetría, ya sea por la presencia de un campo gravitatorio muy fuerte o por el movimiento uniformemente acelerado en una dirección prefijada, es la causa del cambio total de las propiedades del vacío y de la manera como es percibido.

A deduction of the occurrence of the Unruh effect and the Hawking radiation is given, assuming that the space is completely filled by a stochastic classic field. The symmetry proprieties of this field allows a deduction of the proper functional form of the spectrum in order to obtain a result in complete agreement with Quantum Field Theory. The symmetry breaking, either by the presence of a strong gravitational field or by the uniformly accelerated movement in a preferential direction, is the cause of the radical change in the proprieties of vacuum and the way it is perceived.

PACS: 05.40.-a, 11.30.Er

I. INTRODUCCIÓN

Stephen Hawking [1,2] predijo que un agujero negro debería emitir radiación caracterizada por una temperatura:

$$T_h = \frac{\hbar g}{2\pi k_B c}, \tag{1}$$

donde $\hbar$ y c son respectivamente la constante de Planck y la velocidad de la luz en el vacío, además, g es la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del agujero negro, y k_B es la constante de Boltzmann. Esto resultaba de la acción del fuerte campo gravitatorio sobre el campo de vacío (cuántico). De manera separada fue demostrado por Davies y Unruh [3] que un detector uniformemente acelerado, con aceleración a, en el vacío responde como si estuviera en un baño térmico con temperatura:

$$T_u = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}. \tag{2}$$

Ambas situaciones son equivalentes, puesto que el campo gravitatorio puede considerarse equivalente a un sistema no inercial de referencia donde $a = g$. El resultado consiste en que el observador percibe, ya sea cerca del agujero negro o en el sistema no inercial uniformemente acelerado, una radiación caracterizada por una distribución de Bose-Einstein con temperatura dada por las expresiones (1) y (2) respectivamente. Este intrigante resultado de la Teoría Cuántica del Campos ha sido derivado de una manera sencilla en [1] como una consecuencia del cambio no homogéneo temporalmente que ocurre en las fases de los modos que componen el espectro del campo no masivo. Se realizará un estudio similar, pero basado en un campo puramente clásico y con espectro de igual forma que el de un campo no masivo, basándose solamente en las propiedades puramente estocásticas del campo. Además se trabajará solamente con el sistema no inercial de referencia, es decir, con el efecto Unruh, pues el resultado de la Radiación de Hawking se desprende directamente de este.

La Electrodinámica Estocástica (SED, por sus siglas en inglés) ha logrado, desde bases fundamentealmente clásicas, la recuperación de muchos de los resultados de la Mecánica Cuántica [3, 4, 7, 11]. El postulado fundamental de la SED consiste en suponer que el espacio está ocupado en su totalidad por un campo electromagnético de vacío [12, 13], es decir, que está presente aún en ausencia de fuentes [7, 14]. Este campo de vacío debe ser extremadamente simétrico y a partir de sus propiedades de invarianza de Lorentz [7, 10] se ha establecido su forma espectral como de tipo $\propto \omega^{1/2}$ (siendo ω la frecuancia de un modo del espectro). Una de las posibles vías para lograr romper la simetría del campo estocástico de vacío consiste en pasar a un sistema no inercial de referencia acelerado uniformemente. Esta ruptura se garantiza por la aparición de una dirección preferencial. La obtención del efecto Unruh en este caso ya es un resultado bien establecido en la SED [3], pero el acercamiento ofrecido aquí permite centrar la atención en las propiedades puramente estocásticas del campo y no estar atado a especificidades del tipo de interacción que este representa. La forma funcional del espectro puede ser hallada también solo basándose en propiedades del campo como proceso estocástico analizado en el sistema de referencia propio de una partícula sometida a la acción de este.

II. INVARIANZA DE ESCALA Y ESPECTRO DEL CAMPO ESTOCÁSTICO DE VACIÓ

En esta sección se emplean los resultados expuestos en [5, 6] para obtener la forma de la densidad espectral del campo analizado desde el sistema propio de una única partícula en interacción con este. Así es posible considerar al campo como proceso estocástico puesto que la partícula en su sistema propio siempre está en el origen de coordenadas. Teniendo en cuenta que el proceso que caracterice la interacción del campo de vacío sobre una partícula debe ser invariante relativista deben cumplirse las dos condiciones siguientes: 1) Todas las frecuencias tienen que estar representadas en el espectro durante un tiempo de muestreo T suficientemente largo ($T \to \infty$), de lo contrario sería posible distinguir entre sistemas inerciales de referencia apreciando los cambios en las frecuencias del espectro producto al corrimiento Doppler. 2) Todas las frecuencias deben estar igualmente representadas, es decir, su amplitud de Fourier debe coincidir (Para $T \to \infty$). Bajo estas condiciones debe verificarse que ante una transformación de escala ($\omega \to \Lambda^{-1}\omega$) [5, 6], el espectro conserve sus propiedades, es decir:

$$\tilde{f}\left(\frac{\omega}{\Lambda}\right) = \tilde{f}(\omega), \tag{3}$$

siendo $\tilde{f}(\omega)$ la transformanda de Fourier del campo según se definió en [5, 6]. Con este criterio, que se basa solamente en las propiedades estocásticas del campo, se garantiza el cumplimiento de las condiciones impuestas y permite afirmar, según los resultados de [5, 6], que la distribución espectral $S_f(\omega)$ es proporcional a la frecuencia:

$$S_f(\omega) \propto \omega. \tag{4}$$

Las propiedades antes encontradas, preparan las condiciones para poder proponer, en lo que sigue, una forma funcional del campo estocástico [7–9]. Para esto se pasa al sistema propio. Si se toma un intervalo temporal largo, pero finito $[0, T]$, el campo puede ser expresado como una serie de Fourier [7]:

$$f_{A,B}(0, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n\tau + B_n \sin\omega_n\tau). \tag{5}$$

Los coeficientes A_n y B_n son variables aleatorias normalmente distribuidas alrededor del valor cero, con una desviación estándar $\left[S_f(\omega_n)\Delta\omega\right]^{1/2}$ [10] (siendo $\Delta\omega = 1/T$), una descripción alternativa implica fases aleatorias de cada modo distribuidas uniformemente [7]. La fórmula anterior se ha expresado en términos de una fase aleatoria [10] en la forma:

$$f_\theta(0, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n\tau + \theta_n), \tag{6}$$

donde:

$$a_n = \left[2S_f(\omega_n)\Delta\omega\right]^{1/2} \propto [2\omega_n\Delta\omega]^{1/2}, \tag{7}$$

y θ_n es la fase aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para poder demostrar la validez de esta expresión en el sistema de laboratorio, se procede de la siguiente manera: Supongamos que en el sistema de laboratorio se puede expresar el campo estocástico de vacío como una superposición de modos tipo ondas planas con fase aleatoria.

$$f_\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{\alpha} \cos\left(\omega_n\left(t + \frac{x}{c_0}\right) + \theta_n\right), \tag{8}$$

donde $k_n = \omega_n/c$ es una relación de dispersión análoga a la del campo electromagnético. Se planteará entonces el problema de encontrar el valor del parámetro α para que en el sistema propio se preserve la invariancia de escala propuesta. Para esto, se escribe la transformada de Fourier de la fuerza en el sistema de reposo como función de la fuerza en el sistema de laboratorio según la correspondiente ley de transformación [10]:

$$\tilde{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T}^{T} d\tau \sqrt{1 - \beta(\tau)^2} \times \\ \times \sum_{\omega} \omega^{\alpha} \cos\left(\omega\left(t(\tau) - \frac{x(\tau)}{c}\right) + \theta_\omega\right) \exp(-i\Omega\tau), \tag{9}$$

$$\tilde{f}(\Omega) = \\ = \int_{-T}^{T} d\tau \sqrt{1 - \beta(\tau)^2}\, \sqrt{T} \times \\ \times \sum_{\omega} \Delta\omega\omega^{\alpha} \cos\left(\omega\left(t(\tau) - \frac{x(\tau)}{c}\right) + \theta_\omega\right) \exp(-i\Omega\tau). \tag{10}$$

Ahora se efectúa un cambio de variables definido como una transformación de escala según el parámetro Λ aplicada a toda la trayectoria de la partícula para todo instante de tiempo. Esta transformación tiene la propiedad de efectuar el mismo escalamiento en el tiempo propio de la trayectoria. Explícitamente se tiene que:

$$\begin{aligned} t'(\tau') &= \Lambda t(\tau), \qquad x'(\tau') = \Lambda x(\tau), \\ \tau' &= \Lambda\tau, \qquad\qquad \omega = \Lambda\omega' \\ \beta(\tau) &= \beta'(\tau') = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d\Lambda x}{d\Lambda t} = \frac{1}{c}\frac{dx'}{dt'}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt^*}{\sqrt{1 - \beta(\tau(t^*))^2}}, \\ t(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{1 - \beta(\tau^*)^2} d\tau^*, \tag{12}$$

de manera que al sustituir en la expresión (10) se obtiene:

$$\tilde{f}(\Omega) = \Lambda^{\alpha - \frac{1}{2}} \tilde{f}\left(\frac{\Omega}{\Lambda}\right). \tag{13}$$

En (13) se impone que se cumpla la condición (3) entonces se llega a que $\alpha = \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que en el sistema de laboratorio se puede considerar una superposición de modos tipo ondas planas con la forma:

$$f_\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega_n) \cos(\omega_n t + k_n x + \theta_n), \tag{14}$$

donde $a_n(\omega_n) \propto \omega_n^{1/2}$. La relación (13), a pesar de que permite encontrar la dependencia de la amplitud de cada modo con respecto a la frecuencia, parece imponer restricciones sobre la independencia estadística de las fases aleatorias. Las posibles implicaciones de estas restricciones no se han investigado a profundidad y es por eso que la argumentación de la posibilidad de deducir la equivalencia entre el campo definido en el sistema propio con el campo escalar no masivo no se considera del todo completa.

III. SISTEMA DE RINDLER

Una aceleración se dirá uniforme si tiene siempre el mismo valor a medido en un sistema de referencia instantáneo en el que el observador está en reposo. Al sistema de referencia con tales propiedades se le conoce como sistema de Rindler. Si se denota el tiempo medido en el sistema de Rindler como τ_R y se tiene en cuenta que la relación entre la aceleración a medida en el sistema de laboratorio $\frac{dv_R}{dt}$ viene dada por la transformación de Lorentz, queda:

$$\frac{dv_R}{dt} = a\left(1-\beta_R^2\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{15}$$

en donde $\beta_R = \frac{v_R}{c}$. Integrando y tomando $v_R = 0$ en $t = 0$ se tiene que:

$$v_R(t) = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{16}$$

Los diferenciales del tiempo de Rindler τ_R y del tiempo en el sistema de laboratorio estarán relacionados de manera que:

$$dt = \frac{d\tau_R}{\sqrt{1-\beta_R^2}}. \tag{17}$$

Sustituyendo (15) en (17) e integrando, además teniendo en cuenta que $t(0) = 0$ se obtiene la relación:

$$t(\tau_R) = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau_R}{c}\right), \tag{18}$$

Lo que conduce a las relaciones:

$$v(\tau_R) = c\tanh\left(\frac{a\tau_R}{c}\right), \tag{19}$$

$$x(\tau_R) = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau_R}{c}\right). \tag{20}$$

Las coordenadas hiperbólicas $t(\tau_R)$ y $x(\tau_R)$ son conocidas como coordenadas de Rindler. Para establecer adecuadamente la analogía entre el potencial del campo estocástico de vacío y el campo escalar cuántico, se exponen a continuación los cálculos realizados para la distribución espectral de un campo cuántico considerado, por simplicidad, solamente en un punto específico del espacio, este toma la forma:

$$\hat{\phi} = \sum_k\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\hat{a}_k e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t}\right], \tag{21}$$

donde $k = \pm\frac{\omega_k}{c}$ y $\hat{a}_k$ y $\hat{a}_k^\dagger$ son respectivamente los operadores de aniquilación y creación para el k-ésimo modo. Además se verifica que:

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger\right] = \delta_{kk'} \quad \left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}\right] = 0, \tag{22}$$

donde las ecuaciones (22) representan las relaciones de cuantificación. Suponiendo que se está en un estado térmico a temperatura T_f, de manera que el valor de espectación del operador asociado al número de ocupación $\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$ será:

$$\langle\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{k_B T_f}}-1}, \tag{23}$$

el término $1/\left(e^{\frac{\hbar\Omega}{k_B T_f}}-1\right)$ es el correspondiente a la distribución de Bose-Einstein. A continuación se considera el operador transformado de Fourier del campo, es decir:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\Omega) &= \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\hat{\phi}e^{i\Omega t} &= \\ \sum_k\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}\right)^{\frac{1}{2}}\hat{a}_k\delta(\omega_k-\Omega), &\quad \Omega > 0.\end{aligned} \tag{24}$$

De manera que:

$$\begin{aligned}\langle\hat{\varphi}^\dagger(\Omega)\hat{\varphi}\left(\Omega'\right)\rangle &= \\ \sum_k\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}\right)\langle\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\rangle\delta\left(\Omega-\Omega'\right)\delta(\omega_k-\Omega).\end{aligned} \tag{25}$$

Si se toma el límite cuando el volumen tiende a infinito y la suma por k se transforma en una integral $\sum_k \to \frac{V}{2\pi}\int dk$, teniendo en cuenta (23) se obtiene que:

$$\langle\hat{\varphi}^\dagger(\Omega)\hat{\varphi}\left(\Omega'\right)\rangle = \frac{\frac{2\pi\hbar c}{\Omega}}{e^{\frac{\hbar\Omega}{k_B T_f}}-1}\delta\left(\Omega-\Omega'\right). \tag{26}$$

Esta magnitud se calcula simplemente para poder mostrar luego que un cálculo similar realizado sobre el campo estocástico de vacío en analogía con $\hat{\phi}$, visto desde el sistema de Rindler permite obtener resultados igualmente caracterizados por un término tipo distribución de Bose-Einstein de la misma forma que (26). En el trabajo de Milonni [1] se limitan al estudio del mismo campo pero en lugar de estar en un estado térmico, se supone que

$$\langle\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{k'}\rangle = \delta_{kk'}. \tag{27}$$

En el caso del potencial del campo escalar de vacío, la relación (27) se sustituye por una análoga donde el promedio se toma por todas las realizaciones del ensemble.

IV. CAMPO ESTOCÁSTICO, SISTEMA DE RINDLER Y EFECTO UNRUH

Si se considera que sobre una partícula en movimiento actúa el campo estocástico de vacío y se usa una fuerza de tipo:

$$f_\theta(x,\,t) = -\nabla_x \Phi(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega_n)\cos(\omega_n t + k_n x + \theta_n)\,, \tag{28}$$

de manera que los coeficientes garanticen un espectro similar al de la SED [3,7]: $a_n(\omega_n) \propto \omega_n^{1/2}$. Entonces el potencial $\Phi(x,\,t)$ es:

$$\Phi(x,\,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\omega_n)}{\omega_n}\sin(\omega_n t + k_n x + \theta_n)\,. \tag{29}$$

Al hacer los cambios correspondientes en la fase se aprovecha que esta es aleatoria (cambiar la fase en $\frac{3\pi}{2}$ no afecta la uniformidad de su distribución), entonces se puede reescribir el potencial en la siguiente manera:

$$\Phi(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\omega_n)}{\omega_n}\cos(\omega_n t + k_n x + \theta_n)\,. \tag{30}$$

Teniendo en cuenta la forma de los coeficientes a_n, entonces queda que el nuevo coeficiente dependerá de la frecuencia de la forma $\propto \omega_n^{-1/2}$, que es análoga a la dependencia propuesta en [1] para un campo cuantizado no masivo. De manera que si se pasa al sistema de Rindler, y se aplica el mismo procedimiento que en la referencia [1], se tiene que:

$$\Phi(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i(\omega_n t + k_n x + \theta_n)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\star} e^{-i(\omega_n t + k_n x + \theta_n)}, \tag{31}$$

donde se omite la dependencia explícita con ω_n por simplicidad y se ha expresado el potencial real en términos de exponenciales complejas y los coeficientes son de la forma $b_n \propto \omega_n^{-1/2}$. El tiempo y la posición medidos en el sistema de laboratorio en función del tiempo de Rindler τ_R, serán:

$$t(\tau_R) = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau_R}{c}\right),\;\; x(\tau_R) = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau_R}{c}\right) \tag{32}$$

Para mayor comodidad se denota: $c_n(\omega_n) = b_n(\omega_n)e^{i\theta_n}$ quedando:

$$\Phi(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{i(\omega_n t + k_n x)} + c_n^{\star} e^{-i(\omega_n t + k_n x)}\right]. \tag{33}$$

Teniendo en cuenta las transformaciones (32), se llega a que:

$$[\omega_n t(\tau_R) + k_n x(\tau_R)] = \frac{\omega_n c}{a}\exp\left(\frac{a\tau_R}{c}\right). \tag{34}$$

Sustituyendo (34) en (33) se tiene que:

$$\Phi(\tau_R) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\left[\frac{\omega_n c}{a}\exp\left(\frac{a\tau_R}{c}\right)\right]} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\star} e^{-i\left[\frac{\omega_n c}{a}\exp\left(\frac{a\tau_R}{c}\right)\right]}. \tag{35}$$

La transformada de Fourier de la expresión (35) es:

$$\tilde{\Phi}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_R e^{i\Omega\tau_R}\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\left[\frac{\omega_n c}{a}\exp\left(\frac{a\tau_R}{c}\right)\right]} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\star} e^{-i\left[\frac{\omega_n c}{a}\exp\left(\frac{a\tau_R}{c}\right)\right]}. \tag{36}$$

Tomando el valor medio según el ensemble del producto $\tilde{\Phi}(\Omega)\tilde{\Phi}\left(\Omega'\right)$ y teniendo en cuenta la ortogonalidad de los exponenciales complejos:

$$\langle c_n(\omega_n)\, c_m(\omega_m)\rangle \propto \delta_{mn}, \tag{37}$$

queda:

$$\langle\tilde{\Phi}(\Omega)\tilde{\Phi}\left(\Omega'\right)\rangle \propto \left|\Gamma\left(i\frac{\Omega c}{a}\right)\right|^2 \exp\left(-\frac{\pi c\Omega}{a}\right)\sum_k \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{\omega_k c}{a}\right)^{i\left(\Omega-\Omega'\right)c/a}, \tag{38}$$

$\Gamma\left(i\frac{\Omega c}{a}\right)$ es la función Gamma de Euler de argumento complejo. En la ecuación (38) se sustituye la sumatoria por una integral obteniendo:

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{\omega_k c}{a}\right)^{i\left(\Omega-\Omega'\right)c/a} = \frac{V}{2\pi}\int_0^{\infty} dk \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{\omega_k c}{a}\right)^{i\left(\Omega-\Omega'\right)c/a}. \tag{39}$$

Mediante el cambio de variables: $z = \ln(\omega_k c/a)$ [1], se puede llegar finalmente a la relación:

$$\langle\tilde{\Phi}(\Omega)\tilde{\Phi}\left(\Omega'\right)\rangle \propto \left|\Gamma\left(i\frac{\Omega c}{a}\right)\right|^2 \exp\left(-\frac{\pi c\Omega}{a}\right)\frac{Va}{c^2}\delta\left(\Omega-\Omega'\right). \tag{40}$$

Las propiedades de la función Gamma de Euler [15, 16] permiten obtener finalmente:

$$\langle\tilde{\Phi}(\Omega)\tilde{\Phi}(\Omega')\rangle \propto \frac{a/\Omega c}{e^{-\frac{2\pi\Omega c}{a}} - 1}\delta\left(\Omega-\Omega'\right). \tag{41}$$

Como puede notarse, el término $\frac{1}{e^{-\frac{2\pi\Omega c}{a}}-1}$ corresponde a una distribución de Bose-Einstein con temperatura $T_u = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}$.

V. DISCUSIÓN

Se obtuvo un resultado completamente análogo al expuesto por Milonni en [1], pero en el caso de un campo de origen puramente clásico. De vital importancia ha sido la forma funcional del espectro del campo a la hora de efectuar los cálculos que conducen a la distribución de Bose-Einstein. Esto quiere decir que el resultado obtenido es consecuencia de las propiedades del espectro del campo estocástico.

El resultado mostrado en (4) ha sido derivado en el caso del campo electromagnético de vacío en varios trabajos [3,7] usando vías diferentes, en este caso se concentra la atención en las propiedades del campo estocástico y se asegura que el resultado no depende de ninguna otra característica especial que posea el campo debido a su naturaleza, en especial de la fuerza de reacción por radiación [3]. La dependencia de la distribución espectral con la frecuencia tiene importantes implicaciones, baste notar que en el caso de la SED, la expresión (4) es proporcional a la densidad espectral de la energía del campo de vacío y se ve que para una adecuada selección de las constantes de proporcionalidad, se recupera el resultado de la Mecánica Cuántica para la energía del vacío. Es por medio de esta relación que la constante de Planck hace su aparición en la SED y en general en cualquier teoría que se base en un campo estocástico de vacío.

La esencia del efecto Unruh es que el observador uniformemente acelerado percibe un vacío completamente diferente del que percibiría un observador en reposo o movimiento rectilíneo uniforme. En la variante del campo estocástico de vacío, ocurre una ruptura en las propiedades de simetría de su espectro (garantizadas por la forma $\propto \omega^{1/2}$) de manera que se obtiene una distribución modulada por un término de Bose-Einstein idéntico al que se obtiene en un estado térmico según la Teoría Cuántica. Es esto lo que permite identificar el término en la exponencial con la temperatura de Unruh T_u. Es posible establecer una analogía formal entre los ensembles correspondientes a un sistema estocástico y a uno cuántico a partir de comparar la relación (37) con la relación: $\langle \hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$ que representa el valor de expectación correspondiente al operador número de ocupación correspondiente a un campo cuántico no masivo, siendo a_k y $a_k^{\dagger}$ los operadores de aniquilación y creación ya introducidos en (21).

VI. CONCLUSIONES

Las propiedades de simetría del espectro del campo estocástico de vacío permiten obtener la forma del espectro que garantiza matemáticamente la aprición de un término tipo Bose-Einstein que permite identificar la temperatura de Unruh proporcional a la aceleración uniforme. En caso de estar en presencia de un agujero negro, el resultado sería el mismo pero con la aceleración de la gravedad cerca de la superficie del agujero negro en lugar de la aceleración del sistema de Rindler. El resultado obtenido permite dar un paso en la generalización de los métodos de la SED para hacerla menos dependiente de la naturaleza electromagnética del campo que en ella se usa y centrar la atención en conceptos como la simetría del espectro [10].

VII. REFERENCIAS

[1] P. M. Alsing, P. W. Milonni, Am. J. Phys. 72 1524(2004).

[2] S. Hawking, Nature 248, 30 (1974).

[3] L. de La Peña, A. M. Cetto, The Quantum Dice, ISBN 978-94-015-8723-5 (eBook), Alwyn van der Merwe, (1996).

[4] L. de La Peña-Auerbach, A. M. Cetto Jour. Math. Phys. 18, 1612 (1977).

[5] M. O. Cáceres, Elementos de estadística del no equilibrio y procesos estocásticos, Ed. Reverté, Barcelona (2003).

[6] M. O. Cáceres, A. A. Budini, J. Phys. A. Math. Gen. 30, 8427, (1997).

[7] T. Boyer, Phys. Rev. D 11, 790 (1975).

[8] A. Einstein, L. Hopf, Ann. der Phys. 33, 1105 (1910).

[9] M. Planck, The Theory of Heat an Radiation,The Project Gutenberg EBook (1914).

[10] A. Cabo-Bizet, A. Cabo Montes de Oca, Phys. Let. A. 359, 265 (2006).

[11] H. M. França, quant-ph/ 1207. 4076 v2, (2012).

[12] T. W. Marshall, quant-ph/ 0203042vl (2002).

[13] T. W. Marshall, Proc. Roy. Soc. A. 276, 475 (1963).

[14] H. A. Lorentz, The Theory of Electrons, Dover, New York (1952).

[15] A. I. Markushevich: Theory of functions of a complex variable (Prentice-Hall, USA, 1965).

[16] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, Series and products, Academics Press, New York (1980).