

PREMIO NOBEL DE FÍSICA DE 2016: EFECTO HALL CUÁNTICO Y AISLANTES TOPOLÓGICOS

THE 2016 NOBEL PRIZE IN PHYSICS: QUANTUM HALL EFFECT AND TOPOLOGICAL INSULATORS

OSVALDO DE MELO

Facultad de Física, Universidad de La Habana; omelo@fisica.uh.cu
† autor para la correspondencia

Received 28/10/2016; Accepted 28/11/2016

Se describen algunos aspectos esenciales de dos fenómenos relacionados con el Premio Nobel de Física de 2016: el efecto Hall cuántico y los aislantes topológicos. Entre estos aspectos destacan: i) la importancia de la topología para la explicación de la estabilidad de la constante de Klitzing obtenida a partir del efecto Hall cuántico; ii) las propiedades fundamentales de los aislantes topológicos y iii) algunos aspectos de la topología de la estructura de bandas que permiten identificar candidatos de aislantes topológicos.

Essential topics of two phenomena related with the 2016 Nobel Prize in Physics are described: the quantum Hall effect and topological insulators. In particular: i) the importance of topology to explain the stability of the Klitzing constant obtained from the quantum Hall effect; ii) fundamental properties of topological insulators and iii) some aspects of band structure topology that allow us to identify topological insulator candidates.

PACS: Palabras clave. 01.65.+g History of science, 01.85.+f Careers in physics and science, 01.75.+m Science and society

I INTRODUCCIÓN

El premio Nobel de Física de 2016, fue entregado el lunes 3 de octubre a David J. Thouless (Universidad de Washington, Seattle, EUA), F. Duncan M. Haldane (Universidad de Princeton New Jersey, EUA) y J. Michael Kosterlitz (Universidad de Brown, Providence, EUA) (ver Fig. 1) “por descubrimientos teóricos de transiciones de fase topológicas y fases topológicas en la materia”.

Hasta el momento, la teoría desarrollada por los premiados ha abarcado fenómenos como la superconductividad, la superfluidez y algunos problemas relacionados con el magnetismo. Pero probablemente una de las aplicaciones más espectaculares es la predicción y posterior obtención de un nuevo tipo de materiales llamados aislantes topológicos (AT). Con múltiples aplicaciones potenciales que van desde la computación topológica hasta la espintrónica, estos materiales son, de alguna manera, una de las secuelas más importantes del efecto Hall cuántico (EHC) como veremos a lo largo de este trabajo.

II ALGUNOS CONCEPTOS DE TOPOLOGÍA

¿Son diferentes un círculo y un triángulo? Cualquiera con mínimos conocimientos de geometría (incluso sin ellos) diría inmediatamente que sí, que obviamente un círculo y un triángulo son muy diferentes. Sin embargo, en el marco de la topología matemática los dos pertenecen a la misma categoría. Esto se debe a que en esta rama de la ciencia se consideran equivalentes aquellos objetos que puedan transformarse uno en el otro de forma “suave” ya sea deformando, doblando, torciendo, pero no cortando ni pegando partes separadas. Y evidentemente, un triángulo se puede construir deformando un círculo, por ejemplo estirándolo por tres puntos equidistantes.

Una circunferencia no pertenece a la misma categoría que un segmento, porque para hacer el segmento habría que cortar la circunferencia en algún punto, además de estirarla. Una esfera maciza y un plato pertenecen a la misma clase de objeto, topológicamente hablando, porque deformando la esfera se puede construir un plato. Pero un pan redondo

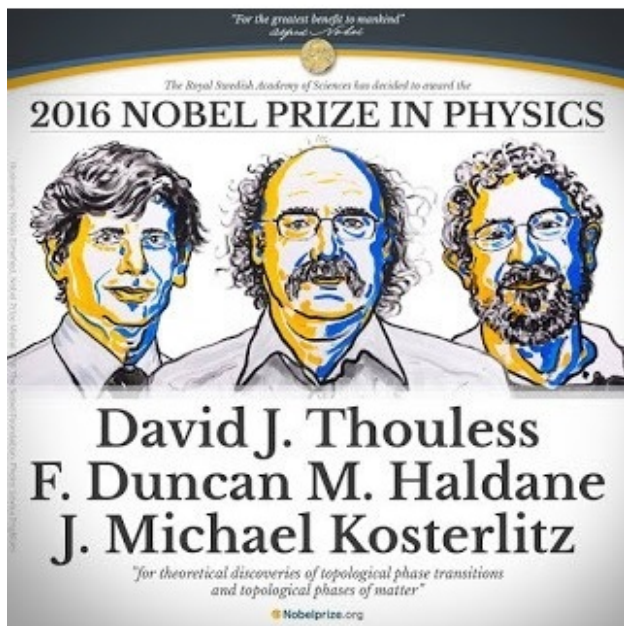


Figura 1. Los ganadores del premio Nobel de Física 2016.

y una rosquita (toroide) no pertenecen a la misma categoría, porque deformando el pan no se puede obtener una rosquita, habría que abrirle un orificio en el medio, o sea, habría que cortar. Por otra parte, una rosquita es la misma cosa (topológicamente hablando) que una taza, porque el asa tiene un agujero y deformando la rosquita se puede obtener la taza (o al revés) sin cortar ni pegar nada (ver Fig. 2). A su vez, la taza es diferente a un buñuelo, que tiene dos agujeros y que vendría a tener el mismo carácter topológico que unos espejuelos.



Figura 2. Una taza se puede convertir en una rosquita solo deformándola, sin cortar ni pegar nada. Por eso ambas pertenecen a la misma categoría topológica.

De lo anterior se desprende que la topología tiene que ver con la forma, aunque no es la forma, y que objetos con aspectos muy diferentes pueden ser equivalentes de acuerdo a su topología. El tipo de topología que posee un ente cualquiera le otorga ciertas propiedades. Y esas propiedades que dependen de la topología no pueden modificarse por transformaciones suaves, por eso se dice que son propiedades robustas que están “protegidas” por la topología.

El tipo de topología se caracteriza por una magnitud llamada invariante topológico que, en el ejemplo anterior, se correspondería con el número de agujeros, al que en topología se llama genus. Así, triángulo, círculo, esfera y plato tienen la misma topología caracterizada por un número de agujeros, genus, igual a cero. La rosquita y la taza tendrían un agujero, y el buñuelo tendría dos. Véase que, de acuerdo con esto, los cambios topológicos ocurren a saltos ya que un objeto puede cambiar de tener un agujero a tener dos o tres, pero no puede tener un agujero y medio, ni un agujero y cuarto. Eso no tendría sentido ya que no existe algo que sea una fracción de agujero.

El número de genus de un determinado objeto puede determinarse matemáticamente por el Teorema de Gauss-Bonnet:

$$g = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_S K dA.$$

En el que K representa la curvatura local de la superficie S , dA es el diferencial de área y g es el genus o número de agujeros. Para el caso simple de una esfera con $K = 1/R^2$ es fácil deducir, a partir de este teorema, que el número de genus es 0, lo que corresponde con el hecho de que la esfera no tiene ningún agujero. Un cálculo un poco más complicado resulta en que un torus tendría un genus igual a 1, y así sucesivamente para otros tipos de superficie. Este número caracteriza la topología del objeto y se puede demostrar que si la esfera se deforma para convertirla en, por ejemplo,

un elipsoide de revolución o cualquier otro objeto que no tenga ningún agujero, aun cuando la curvatura local pueda variar de un punto a otro, el genus dado por la integral de la ecuación se mantiene siempre igual a 0.

Las características topológicas no solo se aplican a objetos sencillos como los descritos anteriormente, sino también a entes más complejos como por ejemplo a la estructura de bandas de los sólidos. En estos casos, al igual que los agujeros, existen números que caracterizan el tipo de topología. Y también estos números, que ya no se corresponden con agujeros, varían a saltos y dan lugar a propiedades que no cambian a no ser que cambie la topología.

Los premiados con el Nobel de este año definieron estos saltos como transiciones de fase topológicas. A diferencia de las transiciones de fase tradicionales como la fusión o la vaporización, las transiciones topológicas no van acompañadas de cambios bruscos en las propiedades termodinámicas de la sustancia (densidad, calor específico, entropía, etc.), que en algunos casos se corresponden con determinadas rupturas de la simetría. Por eso, son un nuevo tipo de transición y, las fases topológicas, un nuevo tipo de estado de la materia diferente a los tradicionales sólido, líquido, gaseoso o plasma, con los que estamos tan familiarizados. En eso radica, en gran medida, su importancia: es un punto de vista totalmente diferente de analizar la naturaleza.

III CONDUCTORES Y AISLANTES

El hecho de que algunos materiales, como los metales, pueden conducir la corriente eléctrica mientras que otros, como el vidrio, no, fue reconocido ya desde el siglo XVIII. Sin embargo, la explicación del porqué de las diferencias entre unos y otros tuvo que esperar al surgimiento de la física cuántica, ya bien entrado el siglo XX, con el desarrollo de la “teoría de bandas”.

Los estados electrónicos de un sólido están dispuestos en forma de bandas de energía permitidas separadas por bandas prohibidas que en lo adelante llamaremos “gaps”. Como consecuencia de la simetría de traslación de la red en los cristales, las bandas permitidas representan un cuasi-continuo de estados, caracterizado por un número cuántico que se conoce como momentum del cristal, o cuasi-momentum. Todos los estados electrónicos no equivalentes de un sólido están contenidos en lo que se conoce como primera zona de Brillouin, que no es más que la celda de Wigner-Seitz en el espacio recíproco.

Debido al principio de exclusión de Pauli, las bandas admiten una cantidad de electrones igual al doble del número de estados, considerando la degeneración debida al espín electrónico. De este modo, si el número de electrones que componen un cierto material es tal que justamente “llena” hasta una determinada banda, quedando la siguiente banda vacía y separada por un “gap”, entonces el material se comporta como un aislante o, si el “gap” no es demasiado grande, como un semiconductor. Si la cantidad de electrones

es tal que la última banda no queda llena completamente entonces el material se comporta como un metal.

La forma en que la energía de las bandas depende del vector momentum dentro de la primera zona de Brillouin, es a lo que se llama estructura de bandas la cual determina las propiedades eléctricas y en gran medida las propiedades ópticas de un material determinado. En los años 70 del siglo pasado parecía que todo estaba bien claro en cuanto a las propiedades de los sólidos en relación con su conductividad eléctrica. Hasta que, en 1980, el investigador alemán Klaus von Klitzing encontró un efecto extraordinario conocido como efecto Hall cuántico (EHC) [1,2].

IV EL EFECTO HALL

Mientras hacía sus estudios de doctorado en 1879, el joven estadounidense de 24 años Edwin Herbert Hall descubrió un efecto relacionado con la electricidad que luego ha tenido una gran trascendencia y múltiples aplicaciones [3]¹. En honor a él se llama efecto Hall y consiste en lo siguiente.

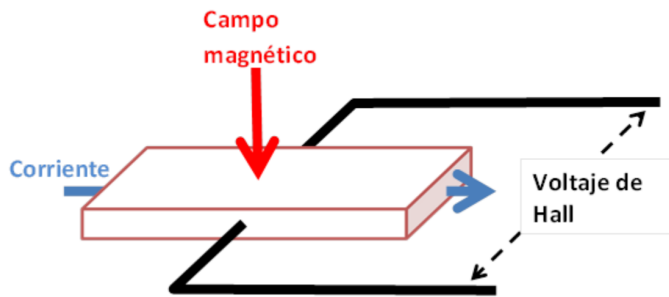


Figura 3. Una medición de Efecto Hall. Se hace pasar una corriente eléctrica a lo largo del material al tiempo que se aplica un campo magnético en una dirección perpendicular. El efecto Hall consiste en que aparece una diferencia de potencial o voltaje entre los extremos de la muestra que se encuentran en una dirección perpendicular tanto al campo magnético como a la corriente.

Si en un material sometido a un campo magnético B relativamente intenso, hacemos pasar una corriente eléctrica I en una dirección perpendicular al campo magnético, aparecerá un voltaje en una dirección perpendicular a ambos, la corriente y el campo magnético, como se ilustra en la Fig. 3. Este voltaje se denomina voltaje de Hall (V_H), y a partir de él se puede definir la conductancia de Hall como el cociente I/V_H . Desde el punto de vista clásico, este efecto se explica a partir de la fuerza de Lorentz que actúa sobre las partículas cargadas.

En su época este fue un descubrimiento notable, pues demostró que la electricidad era conducida en los metales por partículas cargadas negativamente en un momento en que el electrón no se había aún descubierto (esto sucedería casi 20 años después). También permitió descubrir que en ciertos materiales la corriente era transportada por partículas que se comportaban como si estuvieran cargadas positivamente, que hoy se conocen como huecos y que no son más que

el efecto colectivo de una banda permitida casi llena. Hoy el efecto Hall se usa en sensores de campo magnético y en posicionadores de motores de corriente directa, entre otras aplicaciones. Pero sobre todo, el efecto Hall ha dejado una amplia y fructífera secuela que ha permitido un conocimiento cada vez más profundo de las propiedades de la sustancia. En la familia del efecto hoy se incluyen el efecto Hall cuántico, el cuántico fraccionario, el cuántico anómalo, el cuántico de espín y los AT.

Casi cien años después de los experimentos de Hall, el físico alemán Klaus Von Klitzing, realizando mediciones de efecto Hall en capas de solo unos pocos nanómetros de espesor (que dan lugar a lo que se conoce como gas bidimensional de electrones) formadas en la zona de acumulación de un transistor de efecto de campo de silicio usando campos magnéticos muy intensos y temperaturas muy bajas, encontró un resultado asombroso: la conductividad de Hall, σ_H , era siempre un múltiplo de e^2/h donde e es la carga del electrón y h la constante de Planck, o sea $\sigma_H = ne^2/h$, siendo n un entero. Lo realmente asombroso es que la exactitud del número entero n era extraordinariamente alta independientemente de la geometría de la muestra y de las propiedades del material. La conductividad de Hall variaba a saltos y de manera muy precisa a medida que se incrementaba la concentración de electrones (por medio del aumento del voltaje de compuerta, pues el efecto fue demostrado utilizando un transistor de efecto de campo) o el campo magnético aplicado. Al inverso de la conductancia para $n = 1, h/e^2$, se le llamó Constante de Klitzing y él recibió el premio Nobel de Física en 1985 por este hallazgo. Debido a la extrema precisión para determinar ese número experimentalmente, desde 1990 es usado como patrón de resistencia eléctrica a nivel internacional.

Mientras que los valores de conductancia que se obtienen en el EHC pueden ser explicados a partir de las modificaciones que aparecen en la estructura de bandas por efecto del campo magnético, o sea, la aparición de los denominados niveles de Landau, la extrema estabilidad del valor de la conductancia, solo pudo ser interpretada a partir de efectos topológicos. Fueron Thouless y Haldane quienes, trabajando independientemente, llamaron la atención sobre el carácter topológico del efecto. La resistividad variaba a saltos porque a saltos también variaba la topología del problema. O sea, a medida que se incrementaba el campo magnético la conductividad de Hall se mantenía constante, hasta que el campo provocaba un cambio en la topología y se producía un salto en la resistencia.

En este caso, el equivalente a los agujeros o genus, es un número llamado número de Chern que depende del campo magnético, el cual varía a saltos por lo que pequeñas variaciones de campo magnético no pueden alterarlo; de ahí su estabilidad. Esta fue la explicación definitiva de la causa de la robustez de los valores de la resistencia en el EHC. En este caso, lo que tiene un carácter topológico no son objetos sencillos como los de nuestro ejemplo inicial, sino

¹Es curioso que el interés de Hall en hacer el experimento proviene de un error de James C. Maxwell en su teoría del electromagnetismo. Maxwell suponía que la fuerza sobre un conductor con corriente actuaba sobre el conductor mismo, no sobre los portadores de carga. A Hall le pareció extraño y quiso averiguar si era así o no.

la estructura misma de bandas del material en su interacción con el campo magnético.

Se puede demostrar que la conductancia de Hall se determina por la integral [4]:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{2\pi h} \int_{ZB} B(\vec{k}, n) d^2k,$$

en la que B es una función denominada intensidad del campo de Berry (o también curvatura de Berry) que se calcula a partir de las funciones de onda de los electrones, \vec{k} es el momento del cristal y la integral se realiza en toda la zona de Brillouin.

Una generalización del teorema de Gauss- Bonnet debida a Chern [5] utiliza, en vez de la curvatura de una superficie geométrica, la curvatura adiabática, determinada por la curvatura de Berry. Es una ecuación similar a la correspondiente al teorema de Gauss-Bonnet:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{ZB} B(\vec{k}, n) d^2k = C_1,$$

C_1 es un invariante topológico, llamado número de Chern. Este es un número entero, como el número de agujeros en el ejemplo inicial.

A grosso modo, en el EHC ocurre que al variar el campo magnético varía también la curvatura de Berry (así como variaba la curvatura al deformar la esfera), pero dado que la integral tiene que ser un número entero, ella no puede variar continuamente; solo a partir de determinado valor, se producirá un salto en el número de Chern (así como se puede producir un salto en el número de agujeros al perforar la esfera), o sea un cambio en la topología. Al igual que la curvatura de un objeto está relacionada con su topología, la curvatura de Berry está relacionada con la topología de la estructura de bandas de un material.

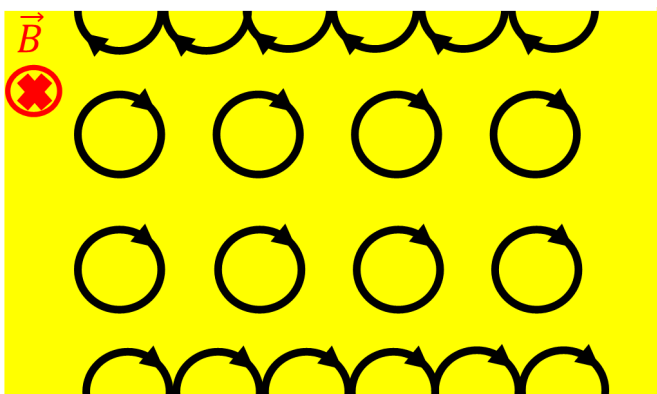


Figura 4. Conducción superficial en el EHC. (La idea de esta figura fue tomada de la ref. [6])

Un aspecto importante en el EHC, sobre todo en relación con los ATs, es que en la dirección de la corriente aparece conductividad superficial como se representa en la Fig. 5. En el interior del material, los electrones se mueven en órbitas circulares debido a la acción del campo magnético (niveles

de Landau) en cierto modo similares a las órbitas de los electrones en los átomos. Sin embargo, los electrones que se mueven cerca de la superficie interrumpen su camino circular al “rebotar” en la superficie, describiendo las trayectorias que se observan en la figura. Se produce una corriente superficial positiva (hacia la derecha) en la cara superior y negativa en la cara inferior.

Los electrones involucrados en estas corrientes, no pueden dispersarse hacia atrás por las impurezas u otros defectos superficiales porque, de cualquier modo, la interacción con el campo magnético los hará moverse siempre hacia adelante, o en otras palabras, porque no existen estados con momento lineal en la dirección contraria: la “vuelta en U” está prohibida para estos electrones. Por eso pueden moverse bastante libremente con una resistencia muy pequeña.

V EFECTO HALL CUÁNTICO DE ESPÍN Y AISLANTES TOPOLÓGICOS

Una de las importantes contribuciones de Haldane fue la propuesta de que el EHC pudiera conseguirse en determinados materiales, aún sin necesidad de aplicar un campo magnético externo, con la condición de que la interacción espín-órbita fuera considerable. Esta interacción entre el momento magnético asociado a la órbita del electrón en el átomo y el espín del electrón se incrementa con el aumento de la carga del núcleo. Por esta razón es de esperarse que ocurra en materiales que contengan elementos pesados.

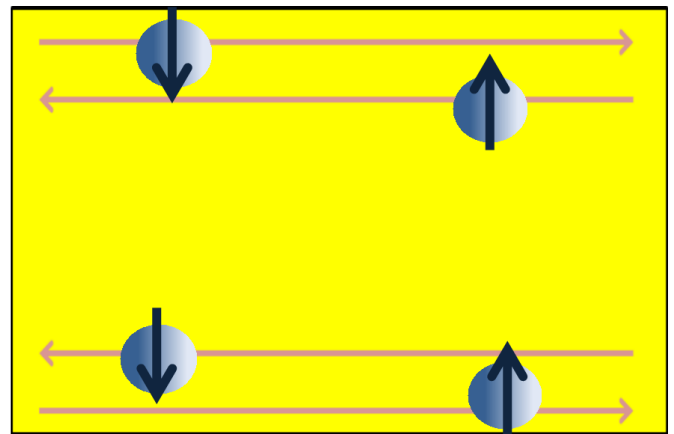


Figura 5. En el efecto Hall cuántico de espín se producen dos canales de conducción en cada arista del semiconductor, la polarización del espín es perpendicular al momento. En la arista inferior, los electrones con momento hacia la derecha tienen el espín hacia arriba y viceversa. En la cara superior ocurre lo contrario.

A esta variante del efecto Hall se le denomina efecto Hall Cuántico de espín (EHCE). Se trata de un efecto bidimensional y fue primero observado en pozos cuánticos del semiconductor HgTe. El papel del campo magnético externo, lo cumple de alguna manera la interacción espín-órbita. En este caso, ocurre un acoplamiento singular entre la polarización del espín y el momento del electrón: en cada una de las aristas exteriores del pozo cuántico se forman dos canales de conducción en los cuales la polarización

del espín y el momento son perpendiculares entre sí, y a momentos contrarios corresponden polarizaciones contrarias del espín como se muestra en la Fig. 5.

Los electrones en estos estados, como en el caso del EHC, también tienen prohibida la dispersión hacia atrás (la “vuelta en U”) pero por una razón diferente. En efecto, pudiera pensarse que en realidad este tipo de dispersión pudiera estar permitida porque en este caso si existen estados con sentido contrario del momento. El requerimiento de simetría ante la inversión del tiempo (SIT) es lo impide este tipo de dispersión en el EHCE.

Un sistema que cumple con la SIT debe mantenerse invariante cuando se cambia el signo del tiempo. Al cambiar el signo del tiempo debe cambiar el signo del momento y también el signo del campo magnético² y del espín. En el caso del EHC, la SIT estaba garantizada ya que si cambiamos el signo del momento y el del campo magnético, las corrientes superficiales que se aprecian en la Fig. 4 se mantendrían en las mismas direcciones. En el caso del EHCE, el asunto es un poco más complicado. Aquí, la dispersión hacia atrás estaría permitida con tal de que el electrón cambiara simultáneamente el sentido de k y el de la polarización del espín, y esto parecería posible porque existe un canal de conducción con momento y espín contrario. Sin embargo, ciertas leyes de la mecánica cuántica prohíben que en la dispersión hacia atrás se cambie el signo del espín. Entonces, la simetría de reversión de tiempo impide este tipo de dispersión también en el EHCE.

Los ATs constituyen una especie de EHCE solo que para materiales 3D. De hecho, también están constituidos por elementos pesados, porque también en ellos la interacción espín-órbita juega un papel fundamental. Ellos son aislantes en el interior, pero en la superficie tienen estados conductores tal como ocurre para las aristas del pozo cuántico en el EHCE, solo que en vez de aristas, en los ATs son superficies. Estos estados conductores en la superficie no son resultado de los típicos defectos superficiales tan bien conocidos en los semiconductores y que también pueden generar estados superficiales en el interior del “gap”. Como veremos a continuación, son un resultado de la topología de la estructura de bandas del material de volumen, del hecho de que en esa región el material de topología no trivial (el AT) está en contacto con el aislante de topología trivial (el vacío o el aire, por ejemplo). Esos estados superficiales no se eliminan por medio de la pasivación, ni tienen que ver con la forma en que se elabore o se trate la superficie. Se dice que están protegidos topológicamente.

Como en el efecto Hall cuántico de espín (EHCE), estos estados tienen la característica de que son quirales, en el sentido de que el momento y la polarización del espín están acoplados. También están protegidos por la SIT que prohíbe la dispersión del tipo “vuelta en U”. Esto hace que la conducción sea robusta y que sea a la vez conducción de carga y de espín. La estructura de bandas consiste en lo que se conoce como conos de Dirac en los que la energía es

proporcional al vector de onda.

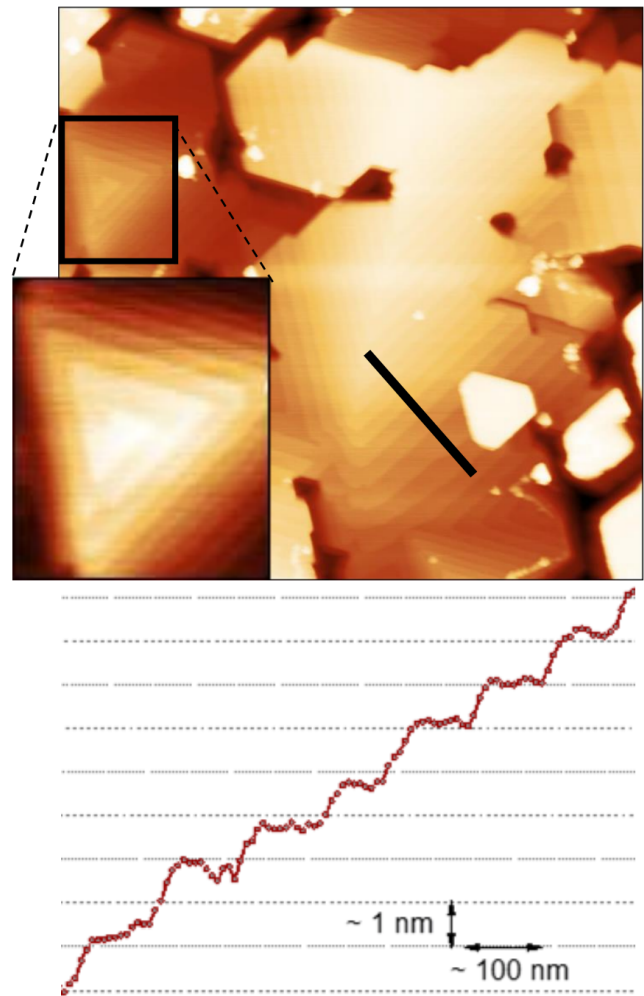


Figura 6. Imagen de la superficie de una capa monocristalina de Bi_2Te_3 obtenida con microscopía de fuerza atómica (parte superior). En el recuadro una vista más ampliada de de una pirámide mostrando la morfología de crecimiento en espiral. Un perfil a lo largo de la línea marcada en la imagen muestra la altura de los pasos (1 nm) y la longitud de las terrazas entre los pasos (100 nm). Obsérvese que la pirámide es muy plana de acuerdo con estos datos.

La existencia ATs fue predicha teóricamente en 2007 [8]; un año después se demostró experimentalmente en monocristales de $\text{Bi}_x\text{Sb}_{1-x}$ [9]. Los autores midieron los conos de Dirac superficiales con una técnica denominada Espectroscopía de Fotoemisión Resuelta en Ángulo (ARPES por sus siglas en inglés) que luego ha sido la técnica de preferencia para probar la condición de AT en un material. Posteriormente se han obtenido varios compuestos de bismuto como el Bi_2Te_3 o Bi_2Se_3 , que también resultaron ser ATs. Estos calcogenuros de bismuto tienen una estructura laminar como el grafeno, aunque en ellos el elemento básico es una capa quintuple que, por ejemplo en el Bi_2Te_3 , tiene un apilamiento Te–Bi–Te–Bi–Te. Lo que los hace aislantes topológicos es el alto valor de la interacción espín-órbita debido al elevado número atómico del bismuto. Se pueden obtener capas monocristalinas de estos materiales mediante

²El cambio del signo del campo magnético puede entenderse suponiendo que el mismo es generado por una bobina. Si cambia el signo del tiempo, los electrones en las espiras comenzarán a moverse en sentido contrario por lo que cambiará el sentido del campo magnético.

técnicas de fase vapor. Como ejemplo, en la Fig. 6 se muestra una imagen de microscopía de fuerza atómica tomada a la superficie de una capa monocristalina de Bi₂Te₃ crecida en los laboratorios de la Facultad de Física de la Universidad de La Habana por transporte físico de fase vapor. El paso de la espiral es de 1 nm que es el espesor de la capa quintuple para este material.

Recientemente se ha descubierto un sinúmero de diferentes ATs lo que prueba que su existencia es mucho más frecuente de lo que se esperaba. Por eso, en cierta medida, existe hoy una caza de este tipo de materiales. La pregunta entonces es: ¿cómo se buscan los ATs?

La topología de las bandas puede saberse a partir del cálculo del correspondiente invariante topológico. En el caso del efecto Hall este invariante, como se vio arriba, es el número de Chern. En el caso de los aislante topológicos, es un número llamado Z_2 que se calcula también a partir de la curvatura de Berry en determinados puntos de simetría de la zona de Brillouin. Sin entrar en detalles que excederían el objetivo de este trabajo, un material con $Z_2 = 0$ correspondería con un aislante normal (o con topología trivial), si $Z_2 = 1$ entonces el material es un AT.

Un procedimiento para averiguar si la estructura de bandas de un material es o no topológicamente igual a la de otro consiste en lo que se conoce como continuación adiabática. Según este procedimiento se parte de un material con una determinada topología (AT o no) y se varía suavemente el hamiltoniano del sistema hasta que coincida con el del material con el cual se quiere comparar la topología. Para ello se van modificando poco a poco diferentes parámetros como por ejemplo la distancia entre átomos, la composición de los núcleos, o la intensidad del efecto espín-órbita. A medida que se realizan estas variaciones se calcula la estructura de bandas del nuevo material.

En cierto sentido, esto es similar a deformar nuestra esfera del ejemplo inicial. Si distorsionando la esfera podemos llegar a otro objeto sin que se haya abierto ningún agujero, entonces la esfera y el otro objeto tendrán la misma topología. Si en la transformación de la esfera es necesario abrir algún agujero para llegar al segundo objeto entonces la topología de los dos objetos es diferente.

En el caso de la continuación adiabática, el equivalente de abrir un agujero es cerrar el "gap". Esto quiere decir que si transformando el hamiltoniano suavemente podemos llegar de un material a otro sin que en la estructura de bandas se haya cerrado el "gap" en ninguno de los pasos, esto quiere decir que ambos materiales son topológicamente equivalentes. Si el primero es un aislante topológico, el segundo también lo será. De esta manera se pueden predecir nuevos AT a partir de otros conocidos. Hay también algunas indicaciones generales para encontrar un AT. Por ejemplo, la interacción espín-órbita debe ser grande y debe haber una inversión de bandas en alguna región de la zona de Brillouin, lo que se traduce en que las bandas no estén en el orden

natural (por ejemplo, que la banda tipo p esté por encima de la banda tipo s , al contrario de su orden natural en la mayoría de los semiconductores).

VI CONCLUSIONES

Se dice que los aislantes topológicos representan la emergencia del espín del electron, que pasa a ser de un espectador a un guía, que hacen que se centre la atención en la ecuación de Dirac mas que en la de Schrödinger. También se especula sobre nuevas implicaciones topológicas más allá de las actualmente descubiertas y de la necesidad de encontrar algún principio organizativo para los materiales en relación con su topología, así como la tabla periódica organiza los elementos, y la simetría, las partículas elementales [12].

Por otra parte, lejos de lo que se pensaba inicialmente, hay ¡muchos! materiales que han resultado ser ATs. No cuesta mucho trabajo fabricarlos y sus propiedades se pueden estudiar a temperatura ambiente. ¿Qué más se puede pedir? Esto ha creado una gran expectativa pues las aplicaciones de estos materiales pudieran ser muchas y muy importantes: se habla de una nueva computación topológica y de una nueva electrónica basada no en la carga sino en el espín del electrón, la espintrónica. También del posible descubrimiento de partículas exóticas, previstas teóricamente pero hasta ahora no encontradas, como por ejemplo los fermiones de Majorana. Estos fermiones, que tendrían la singular propiedad de ser sus propias antipartículas, pudieran aparecer en la superficie de contacto de un superconductor y un aislante topológico. Hoy, todo eso parece exótico, pero seguramente tanto como en los años cincuenta lo fue el transistor que ha revolucionado nuestras vidas en menos de una centuria, de una manera fabulosa.

REFERENCIAS

- [1] K. v. Klitzing, *Seminaire Poincaré* 2, 1 (2004).
- [2] K. v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* 45, 494 (1980).
- [3] E. Hall, *American Journal of Mathematics*. 2, 287 (1879).
- [4] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. Den Nijs, *Phys. Rev. Lett.*, 49, 405 (1982).
- [5] S. Chern, *Annals of Mathematics* 45, 747 (1944).
- [6] C. Kane, J. Moore, *Physics World* 24, 32 (2011).
- [7] F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 1988 (2015).
- [8] F. Liang, C. L. Kane, *Phys. Rev. B* 76 045302 (2007).
- [9] D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan, *Nature* 452 970 (2008).
- [10] O. Concepción, O. de Melo, A. Escobosa, *Appl. Surf. Sci.* (enviado a publicar).
- [11] A. Bansil, H. Lin, T. Das, *Rev. Mod. Phys.* 88 021004 (2016).
- [12] S. Zhang, *Physics* 1, 6 (2008).