

VISCOSIDAD MAGNÉTICA: DETERMINACIÓN DE LA RESISTIVIDAD ELÉCTRICA

MAGNETIC VISCOSITY: DETERMINATION OF ELECTRICAL RESISTIVITY

C. CASIMIRO-CARRAZANA, B. RODRÍGUEZ-SAENZ Y G. ROJAS-LORENZO[†]

Facultad de Ciencias y Tecnología Nucleares, InSTEC, Universidad de La Habana, Cuba; german@instec.cu[†]

[†] autor para la correspondencia

Recibido 20/10/2017; Aceptado 16/11/2017

Se propone una práctica de laboratorio para la asignatura de Electromagnetismo, que permite determinar la resistividad eléctrica del cobre, sobre la base del fenómeno de inducción electromagnética. Para ello se utiliza un modelo físico que describe el paso de un imán de neodimio a través de un tubo cilíndrico de cobre vertical, en el cual se representa a la fuerza ponderomotriz -magnética- que actúa sobre el imán como una fuerza viscosa. El modelo fue implementado numéricamente y el proceso simulado computacionalmente. En el desarrollo de la práctica se necesita realizar mediciones directas de varias magnitudes físicas como longitud, espesor, masa, tiempo y módulo del campo magnético.

A practical activity at laboratory associated to the course of Electromagnetism is proposed in order to determine electrical resistivity of copper, taking into account the electromagnetic induction phenomena. For this purpose, it was applied a physical model describing the movement of a neodymium magnet through a vertical cylindrical pipe made of copper, considering the magnetic force acting on the magnet as a viscosity force. The model was numerically implemented and several simulations of the process were carried out. Direct measurements of several physical quantities such as length, thickness, mass, time and modulus of magnetic field, were required during the activity.

PACS: Electromagnetic induction, 91.25.Qi; Coils 84.32.Hh; Diamagnetism in metals, 75.20.En; Laboratory experiment, 01.50.Pa; Physics education, 01.40.-d

I. INTRODUCCIÓN

Cuando un cuerpo, bajo la acción de la fuerza de gravedad, atraviesa un fluido viscoso en régimen laminar (valores bajos del número de Reynolds), podría, sobre la base de ciertas condiciones, comenzar a moverse con velocidad constante. Para ello el fluido debe tener un coeficiente de viscosidad lo suficientemente grande, que provoque que la fuerza de fricción que actúa sobre el cuerpo compense a la fuerza de gravedad. Si se cumplen estas condiciones, el cuerpo realizará un movimiento rectilíneo uniforme (MRU).

Un fenómeno que a primera vista parece tener poco, o casi nada, en común con el movimiento de un cuerpo a través de una sustancia viscosa, se manifiesta cuando dejamos caer un superimán a través de un tubo cilíndrico vertical, hecho de una sustancia diamagnética conductora (cobre). Experimentalmente, y de acuerdo al comportamiento de las sustancias diamagnéticas, se ha determinado que el imán no toca las paredes del tubo, y se establece un MRU a los pocos instantes de haber comenzado el movimiento [1-4].

Cuando el imán atraviesa el tubo de cobre, en este último se produce una corriente eléctrica bajo la acción de una *fem* inducida. La corriente se establece siguiendo una trayectoria cerrada a lo largo de la sección transversal del tubo. La circulación de la corriente por el medio diamagnético conductor interactúa con el imán y se manifiestan fuerzas ponderomotoras que se oponen a su movimiento. Estas fuerzas, sobre el imán, actúan en sentido contrario a la fuerza de gravedad y aumentan proporcionalmente con la velocidad del mismo. En estas condiciones el cuerpo

magnético realizará un movimiento desacelerado hasta que la fuerza resultante sobre él se anule, y a partir de ese momento su velocidad será constante (MRU).

El modelo propuesto en la literatura, para estudiar este fenómeno, considera al imán como una espira circular con corriente, que genera un momento dipolar magnético \vec{m} . Dicho momento \vec{m} es estimado a partir de un ajuste realizado a mediciones experimentales del campo magnético del imán a lo largo de su eje de simetría, en función de la distancia [1,2].

El objetivo del trabajo es diseñar una práctica de laboratorio que, sobre la base del experimento descrito, permita la determinación de la resistividad del material conductor y diamagnético. Para ello se utiliza el modelo que considera al imán como una espira circular con corriente, pero en lugar de estimar el momento \vec{m} se estima la corriente I_0 . A partir de esta consideración se realizaron los desarrollos matemáticos pertinentes en busca de su solución analítica y numérica. Es importante destacar que este no es, necesariamente, el mejor método para medir la resistividad. La idea central del trabajo consiste en explorar el fenómeno que nos ocupa para hallarla.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

La fuerza ponderomotriz que actúa sobre un superimán, que cae bajo la fuerza de gravedad a través de un tubo largo de cobre, tiene un efecto muy parecido al producido por la resistencia fluido-dinámica. Esta fuerza \vec{F}_f es proporcional a la velocidad y se puede expresar como,

$$\vec{F}_f = -K_f \vec{v}, \quad (1)$$

donde el signo negativo indica que la fuerza se manifiesta en sentido opuesto al movimiento, y la constante K_f se denomina rozamiento aerodinámico.

Mediante este razonamiento se puede, como primera aproximación, asumir que sobre el imán actúa una fuerza como la descrita en la ecuación (1). La misma es provocada por la interacción del campo magnético del imán con la corriente inducida a través de la sustancia diamagnética conductora. La constante $K = K_m$ asociada a ella la denominaremos rozamiento magnético por analogía. Desde este punto de vista sobre el imán actúan dos fuerzas de fricción, la de rozamiento aerodinámico y la de rozamiento magnético, las que contribuyen a una fuerza de sustentación neta,

$$\vec{F} = -(K_f + K_m) \vec{v}. \quad (2)$$

Sin embargo, el experimento demuestra que existe una diferencia muy marcada en el tiempo que necesita el imán y cualquier otro objeto no magnético, de masas y características geométricas similares, para atravesar un tubo de cobre vertical largo. Por ello en el frenado del imán el papel decisivo lo juega el rozamiento magnético y no el aerodinámico. Para este caso, por simplicidad, se asumirá que el efecto de la fuerza de resistencia fluido-dinámica es despreciable frente al provocado por el rozamiento magnético. Su movimiento estará regido en lo fundamental por la acción de una fuerza \vec{F}_m de rozamiento magnético y la acción de la fuerza de gravedad \vec{F}_g . Por lo tanto, de la segunda ley de Newton aplicada sobre el imán, se tiene que:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_m, \quad (3)$$

que conduce a la siguiente expresión para la aceleración del cuerpo,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{K}{m} \vec{v}. \quad (4)$$

En la ecuación (4) se presenta a la constante K_m como K , a la masa del imán como m y a la aceleración de la gravedad, en la superficie de la tierra, como g . Considerándose en la misma que los vectores son paralelos y tienen el mismo sentido, esta se puede escribir como,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m} v. \quad (5)$$

La solución de la ecuación diferencial (5) es

$$v(t) = \frac{mg}{K} \left[1 - e^{-\frac{K}{m}t} \right], \quad (6)$$

donde se observa que para tiempos muy grandes el término exponencial de la ecuación desaparece y la velocidad tiende a ser constante. No obstante, el experimento muestra que para tiempos relativamente pequeños, del orden de las décimas de segundo, esta aproximación es buena. Por ello, el tiempo que

tarda el imán en recorrer la tubería va a estar determinado en lo fundamental por la velocidad constante que alcanza en su recorrido vertical [1,2].

A partir de estas consideraciones se puede determinar la velocidad del imán, en su movimiento, como,

$$v(t) = \frac{mg}{K} \approx \frac{L}{\Delta t}, \quad (7)$$

siendo L la longitud de la tubería de cobre y Δt el tiempo del recorrido del imán a través de la misma.

El primer paso a seguir, para cumplir el objetivo propuesto, es encontrar una expresión analítica que permita determinar el coeficiente K . Para ello se utiliza la analogía que se establece entre el campo magnético del imán y el de una cinta con corriente, tal como se plantea en la literatura [1,2]. Como el imán utilizado tiene simetría axial en su geometría (cilindro de radio r y altura h), la cinta conductora se toma como una espira circular de radio exterior r por la que circula la corriente I_0 . Además se considera que el tubo de cobre es infinito. Esta asunción se realiza sobre la base de que la longitud del tubo L es mucho mayor que la altura del imán ($h \ll L$), y permite despreciar en el modelo los llamados efectos de borde.

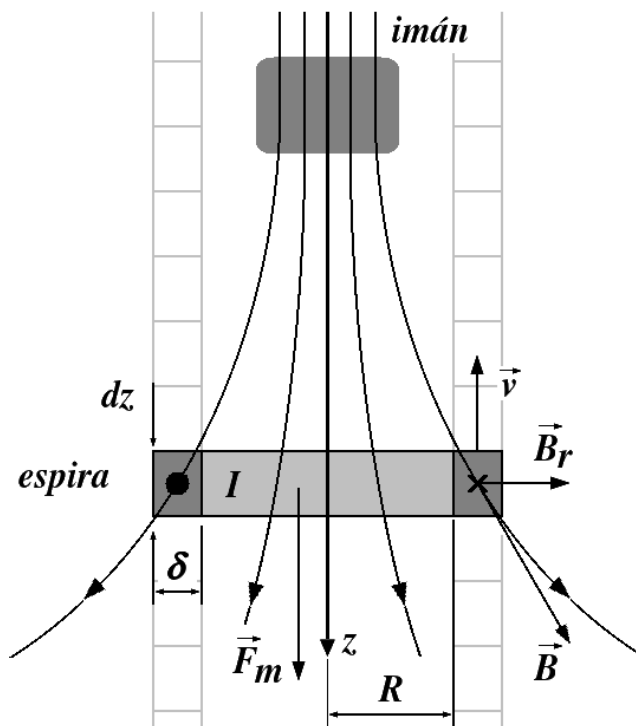


Figura 1. Representación de una sección del tubo conductor diamagnético de altura dz , radio interior R y espesor δ , por la que circula una corriente I en presencia de un imán.

En el modelo, para representar el tubo conductor y diamagnético, este se divide a lo largo de su altura, en secciones dz muy pequeñas, de espesor δ , que tienen forma de anillo (espira circular).

Para el estudio de la corriente que se genera en una de estas espiras, como resultado de la inducción provocada por el

movimiento del imán (vea la Figura 1), se coloca el sistema de referencia en el cuerpo magnético, y por lo tanto, es el anillo el que se mueve. En el esquema se representa con R el radio interior del anillo, con \vec{B}_r la componente radial del campo de inducción magnética \vec{B} generado por el imán en los puntos de la espira, y con I la corriente que produce la *fem* inducida por el movimiento relativo imán-espira.

Para determinar el valor de la *fem* se hará uso de la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 2\pi R v B_r. \quad (8)$$

La corriente I que se induce en el anillo, producto de esta *fem*, se determina a partir de la ley integral de Ohm, como la razón entre la fuerza electromotriz ε y la resistencia R_Ω de una espira circular con sección rectangular. Para calcular el valor de la resistencia del anillo se utiliza la ley de Poillet y el tratamiento de resistencias conectadas en paralelo. De ello se obtiene,

$$R_\Omega = \frac{2\pi\rho}{dz \ln(1 + \delta/R)}, \quad (9)$$

donde ρ es la resistividad eléctrica del material del cual esta hecho el tubo diamagnético y conductor. Por lo tanto, la corriente I , inducida en el anillo, adquiere la forma,

$$I = \frac{RvB_r}{\rho} \ln(1 + \delta/R) dz, \quad (10)$$

La fuerza que actúa sobre el imán como consecuencia de la interacción de su campo magnético con la corriente inducida en el anillo se puede determinar según la ecuación,

$$\vec{F}_m = \oint_{\Gamma} I d\vec{l} \times \vec{B} = 2\pi R I B_r \hat{k}. \quad (11)$$

El valor del módulo de la componente radial del campo magnético B_r del imán, se obtiene al aplicar la Ley de Biot-Savart al modelo que lo considera como una espira circular con corriente I_0 (ver deducción en el anexo),

$$B_r = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} r z \int_0^\pi \frac{\cos(u) du}{[R^2 + r^2 + z^2 + 2rR \cos(u)]^{3/2}}. \quad (12)$$

En la ecuación (12) el término z representa la distancia que hay desde el centro del anillo por el que circula la corriente I (sección del tubo) hasta el centro de la espira circular por la que pasa la corriente I_0 (imán). La componente radial del campo que genera la corriente I_0 depende de las variables r, R y z .

Al considerar al tubo diamagnético conductor como la superposición de muchos anillos de radio R , que se encuentran a diferentes distancias z , del centro de la espira que representa al imán, podemos determinar la fuerza que

ejerce este último sobre el tubo. Para ello se calcula la suma de las fuerzas que ejerce el material magnético sobre cada uno de los anillos que componen al tubo diamagnético conductor. El módulo de la fuerza que actúa sobre cada anillo, en la dirección \hat{k} , se considera como un pequeño aporte y está dado por la expresión,

$$dF_m = \alpha v \beta(r, R, z) dz, \quad (13)$$

donde el término,

$$\alpha = \frac{(\mu_0 I_0)^2}{2\pi} \frac{\ln(1 + \delta/R)}{\rho}, \quad (14)$$

y el término,

$$\beta = (Rr z)^2 \left\{ \int_0^\pi \frac{\cos(u) du}{[R^2 + r^2 + z^2 + 2rR \cos(u)]^{3/2}} \right\}^2. \quad (15)$$

Como el radio del tubo de cobre R es estrictamente mayor que el radio de la espira con corriente r , en esta última ecuación el denominador es diferente de cero para cualquier valor de u y de z .

El módulo de la fuerza neta que ejerce el imán sobre el tubo (y por tercera Ley de Newton, la que el tubo ejerce sobre el imán) se obtiene al integrar por toda la longitud del tubo (infinito),

$$F_m = \alpha \gamma(r, R) v, \quad (16)$$

donde,

$$\gamma(r, R) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(r, R, z) dz. \quad (17)$$

En la ecuación (17) se aprecia que $\gamma(r, R)$ es una constante que depende únicamente de los radios del imán r y del tubo R . En la misma, en función de la variable z , se obtiene en los casos límites $-\infty$ y $+\infty$ una dependencia del tipo z^{-4} . Numéricamente se comprobó la convergencia de la integral (17), y se obtuvo el valor de la constante.

Con los desarrollos obtenidos en las ecuaciones (7), (14) y (16), al hacer las sustituciones pertinentes, para el caso en que la fuerza magnética compense a la fuerza de gravedad ($F_m = F_g$), se llega a la ecuación,

$$\rho = I_0^2 \frac{\ln(1 + \delta/R)}{mg} \frac{L}{\Delta t} \gamma(r, R). \quad (18)$$

Note que a partir de la ecuación (16) se puede obtener la constante de fricción como $K = \alpha \gamma(r, R)$, mientras que de la relación (7) se puede expresar a la misma como $K = mg \Delta t/L$.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El resultado expresado en la ecuación (18), abre la posibilidad de crear una práctica de laboratorio, para determinar la resistividad del material del que está hecho el tubo diamagnético, conductor. Para ello se necesita medir experimentalmente los valores de las características del tubo (R, δ, L), del imán (r, m), el tiempo Δt , y el campo magnético del imán, a lo largo de su eje de simetría, en función de la distancia a este. También se requiere estimar, con un ajuste, la corriente I_0 y calcular, con un programa numérico, el valor del coeficiente $\gamma(r, R)$.

Se montó un pequeño dispositivo experimental para medir los valores del campo magnético, en el eje de simetría del imán, a diferentes distancias del mismo. Para ello se utilizó un magnetómetro de efecto Hall (Figura 2) y un soporte milimetrado que sostiene, mediante un brazo no magnético (madera) al elemento magnético.

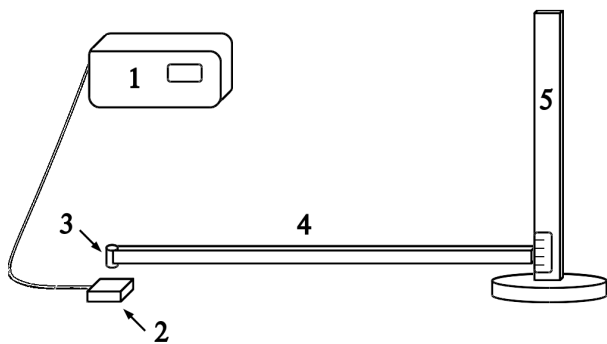


Figura 2. Dispositivo experimental para determinar el campo magnético del imán a lo largo de su eje de simetría, en función de la distancia. Magnetómetro de efecto Hall (1), elemento Hall (2), imán (3), brazo de madera (4), soporte de medición (5).

En la Figura, a la derecha, detrás, está el magnetómetro de efecto Hall y delante se encuentra un soporte vertical que tiene un sistema de nonios para la medición de la distancia. Acoplado al soporte hay un brazo de madera horizontal, en cuyo extremo izquierdo se coloca el imán. A la izquierda y bajo el extremo del brazo de madera, se encuentra la pastilla Hall.

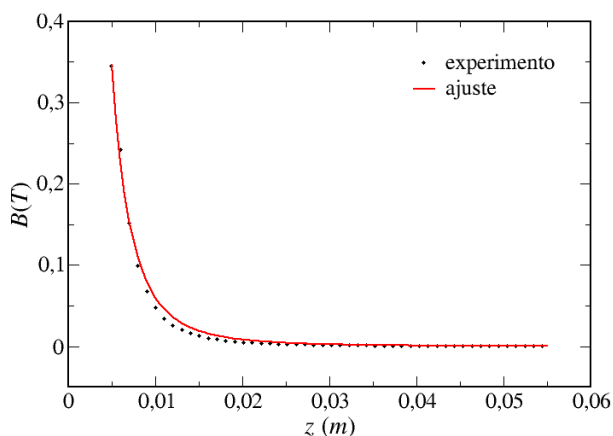


Figura 3. Ajuste de los datos experimentales a la función descrita por la ecuación (19).

Los valores de campo magnético en función de la distancia al imán se ajustaron a través de la ecuación (19), que describe el campo magnético de una espira circular con corriente, en el eje de simetría de la misma a una distancia z de su centro. Como parámetro de ajuste se utilizó la corriente I_0 . El valor de r se tomó de las mediciones directas realizadas sobre el imán.

$$B(z) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19)$$

En el ajuste se obtuvo un coeficiente de correlación, entre los datos experimentales y la función de prueba, de 0,997. El valor de la corriente I_0 fue de 12126,1 A. En la Figura 3 se presentan los datos experimentales con círculos negros, y el resultado del ajuste con una línea continua en rojo.

El último paso es la medición de Δt . La misma se realizó con la ayuda de un dispositivo, como el que se muestra en la Figura 4, para medir tiempos en experimentos de caída libre. Este dispositivo consta de un electroimán que permite sostener al imán, justo sobre el borde superior del tubo de cobre. Al liberar el imán, éste pasa por dos sensores. El primero se coloca justo en el extremo superior del tubo (registra el instante en que se inicia el proceso) y el otro se coloca justo en el extremo inferior del mismo (registra el instante en que finaliza el proceso). El equipo reporta el tiempo que tarda el imán en recorrer el tubo de cobre.

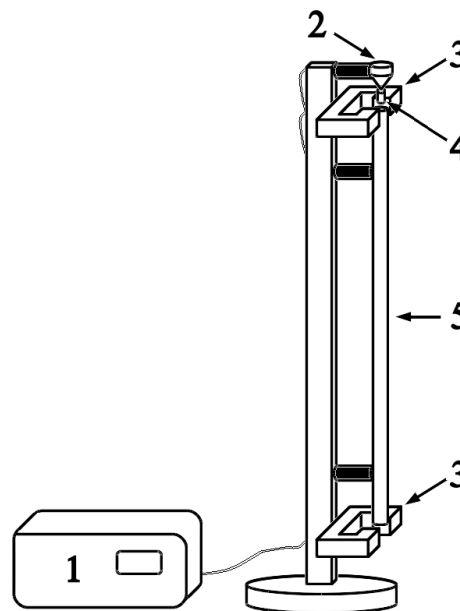


Figura 4. Dispositivo experimental modificado para medir el tiempo que demora el imán en atravesar el tubo de cobre. Equipo para registro del tiempo (1) y control del electroimán (2) y de los sensores (3), imán (4), tubo de cobre (5).

Las mediciones del tiempo de tránsito del imán por el tubo de cobre se realizaron 100 veces. El resultado arrojó un valor de $(4,280 \pm 0,001)$ s.

La masa del elemento de neodimio se midió en una balanza analítica. Los radios y alturas del tubo de cobre y del imán, así como el espesor del primero, se midieron con ayuda de

un pie de rey. En la Tabla 1 se presentan los resultados de las mediciones directas realizadas

Tabla 1. Mediciones directas de las propiedades del tubo y el imán.

| Magnitud | Valor | Incertidumbre |
|----------|---------|---------------|
| R | 8,00 mm | 0,01 mm |
| L | 37,6 cm | 0,1 cm |
| δ | 1,00 mm | 0,01 mm |
| r | 3,00 mm | 0,01 mm |
| m | 1,17 g | 0,01 g |

Se resuelve numéricamente la integral (17), para los valores de r y R reportados en la Tabla 1. Esto arroja el valor para $\gamma(r, R)$ de $1,28 \times 10^{-16}$ kg Ω /A² s.

La resistividad eléctrica del cobre, determinada a través de la relación (18), toma el valor de $1,705 \times 10^{-8}$ Ω m. En la literatura se reportan diversos valores que dependen de la pureza del cobre, de la temperatura, y de otros factores como tratamientos térmicos que se les aplica, etc. A la temperatura de 293 K, se reportan valores que pueden variar entre $1,680 \times 10^{-8}$ Ω m y $1,780 \times 10^{-8}$ Ω m [4-6]. La desviación del valor obtenido, respecto a los límites encontrados en la literatura es menor que el 4,0 por ciento. Para el cobre tratado térmicamente se reporta el valor de $1,720 \times 10^{-8}$ Ω m, [5] lo que refleja, respecto a nuestro cálculo, una desviación de 1,1 por ciento.

En la práctica de conductividad eléctrica en sólidos, donde el valor obtenido para la resistividad del cobre es de $1,749 \times 10^{-8}$ Ω m, se utiliza un alambre y su resistividad se determina a través de la Ley de Poillet. En este caso, nuevamente, la desviación del valor obtenido, respecto a los límites encontrados en la literatura es menor que el 4,0 por ciento.

La diferencia de los resultados entre la práctica que proponemos y la de conductividad eléctrica en sólidos, podría deberse a que en un caso se trabaja con un tubo de cobre tratado térmicamente, y en el otro con un alambre conductor filiforme de cobre.

En trabajos futuros se aplicará el modelo al caso de un tubo de aluminio. Este material conductor es paramagnético, sin embargo se ha comprobado que las interacciones de este con el tubo son tan débiles que el mismo no se pega a sus paredes.

IV. CONCLUSIONES

El modelo utilizado para representar el imán (una espira por la que circula una corriente I_0 , lo suficientemente grande para generar el campo magnético del superimán), ha permitido obtener valores de la resistividad del cobre bastante precisos. Se pudo reproducir en gran medida el comportamiento real del imán, lo cual se verifica en los resultados obtenidos.

Debido a las condiciones en que se llevó a cabo el experimento, es posible, montar una práctica de laboratorio, ya que se necesita un magnetómetro por efecto Hall, un tubo de material diamagnético conductor, una instalación que permita medir intervalos de tiempo en caída libre, y un superimán.

El valor obtenido para la resistividad está en muy buena concordancia con el valor reportado experimentalmente, con una desviación de 1,1 por ciento.

En esta propuesta, mediante modelos numéricos, el estudiante será capaz de interactuar con el fenómeno de interés, extraer conclusiones sobre el comportamiento del superimán, así como obtener una aproximación confiable sobre la resistividad del material del tubo conductor diamagnético.

Se ha explicado de manera satisfactoria, el proceso de interacción entre un superimán, y un tubo vertical de material diamagnético conductor, en movimiento a través del mismo.

La práctica de laboratorio propuesta integra conocimientos de mecánica, electromagnetismo, análisis matemático y métodos numéricos.

V. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al Dr. Alfo José Batista Leyva por todo el aporte que realizó a través de constantes y fructíferas discusiones. Igualmente, se agradece el tiempo y recursos de los laboratorios de Mecánica, Molecular y Electrónica que ofrecieron los profesores Lic. Lázaro Hassiel Negrín Yuvero, Lic. Nadina Tomás Cobas y MsC. Doris Rivero Ramírez.

VI. ANEXO

La obtención de la ecuación (12) se apoya en los elementos presentes en la Figura 5. En la misma tenemos una espira circular de radio r , por la que pasa una corriente I_0 . El origen de coordenadas se coloca en el centro de la espira, de manera que esta se encuentra en el plano $z = 0$. El vector \vec{r}_1 , cuyo módulo es igual a r , indica la posición de un elemento de corriente en la espira, el vector \vec{r}_2 señala el punto donde se desea determinar el vector de inducción magnética, y el vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es tal que su módulo representa la distancia que hay desde el elemento de corriente hasta el punto de observación.

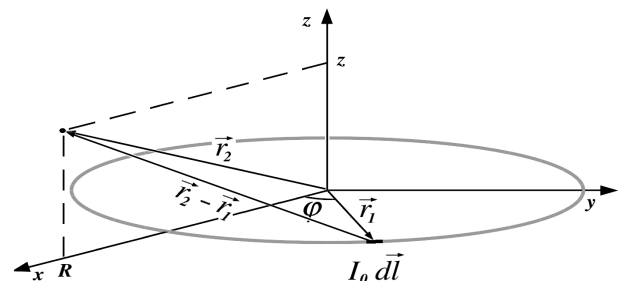


Figura 5. Elementos presentes en la determinación del vector de inducción magnética por medio de la Ley de Biot-Savart.

El vector \vec{r}_1 , en coordenadas cartesianas, se expresa como

$$\vec{r}_1 = x \hat{i} + y \hat{j}.$$

Este vector está contenido en el plano $z = 0$ y señala a los puntos de una circunferencia de radio r . Al expresar las

variables x y y en función de las variables r y φ , el mismo adopta la forma, $\vec{r}_1 = r \cos\varphi \hat{i} + r \sin\varphi \hat{j}$.

El vector \vec{r}_2 , se encuentra contenido, por conveniencia, en el plano $y = 0$, por lo que,

$$\vec{r}_2 = R \hat{i} + z \hat{k}.$$

Con estos resultados se obtiene,

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (R - r \cos\varphi) \hat{i} - r \sin\varphi \hat{j} + z \hat{k},$$

cuyo módulo es,

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(R - r \cos\varphi)^2 + (r \sin\varphi)^2 + z^2},$$

que se transforma en

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos\varphi}.$$

En el sistema MKS la Ley de Biot-Savart se plantea como,

$$d\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3},$$

donde, $d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j}$, que en función de las variables r y φ adopta la forma,

$$d\vec{l} = -r \sin\varphi d\varphi \hat{i} + r \cos\varphi d\varphi \hat{j}.$$

Entonces, al resolver el producto vectorial en la Ley de Biot-Savart, las contribuciones que realiza el elemento de corriente a las componentes del campo, en el punto que señala \vec{r}_2 son,

$$dB_x = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} r z \frac{\cos\varphi d\varphi}{[R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos\varphi]^{3/2}},$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} r z \frac{\sin\varphi d\varphi}{[R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos\varphi]^{3/2}},$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} r \frac{(r - R \cos\varphi) d\varphi}{[R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos\varphi]^{3/2}}.$$

El punto de observación se seleccionó en el plano $y = 0$ porque en el mismo la dirección y sentido del versor \hat{i} coinciden con las del versor \hat{r} , el cual indica la dirección

radial en coordenadas cilíndricas. Para puntos fuera de este plano el resultado es el mismo, pues siempre podremos seleccionar el sistema de coordenadas de forma que el punto de observación esté contenido en el plano $y = 0$.

Al integrar los aportes de todos los elementos de corrientes que conforman la espira, la componente radial del campo resultante queda como,

$$B_r = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} r z \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{[R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos\varphi]^{3/2}}.$$

Con el cambio de variables $u = \varphi - \pi$ se obtiene,

$$B_r = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} r z \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(u) du}{[R^2 + r^2 + z^2 + 2Rr \cos(u)]^{3/2}},$$

la que es simétrica en el intervalo de integración, y por lo tanto se puede reescribir como,

$$B_r = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} r z \int_0^{\pi} \frac{\cos(u) du}{[R^2 + r^2 + z^2 + 2Rr \cos(u)]^{3/2}}.$$

REFERENCIAS

- [1] G. Donoso, C. L. Ladera and P. Martín, Am. J. Phys. 79, 193 (2011).
- [2] G. Donoso, C. L. Ladera and P. Martín, Eur. J. Phys. 30, 855 (2009).
- [3] K. Weise. "Advanced Modeling in Lorentz Force Eddy Current Testing". Tesis de doctorado, Universidad Técnica de Ilmenau, 2016.
- [4] R. P. Uhlig, M. Zec, H. Brauer and A. Thess, J. Nondestruct. Eval. 31, 357 (2012).
- [5] Bureau of standards, Copper wire tables. (Washington Government Printing Office, 1914)
- [6] W. Benenson, J.W. Harris, H. Stocker and H. Lutz, Handbook of Physics Fourth Edition 2000 (Springer-Verlag, New York, 2002)