

# INTERCAMBIO DE ENERGÍA EN EL IMPACTO DE UNA ESFERA CON LA SUPERFICIE DE UN LÍQUIDO

## ENERGY EXCHANGE IN THE IMPACT OF A SPHERE WITH A LIQUID SURFACE

P. PAJÓN-SUARÉZ<sup>a†</sup>, O. A. PÉREZ-RUIZ<sup>b</sup>, O. A. PÉREZ-LAURENTI<sup>c</sup>

a) Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas (InSTEC), 10400 La Habana, Cuba; pps@instec.cu<sup>†</sup>

b) Universidad "Jesús Montané Oropesa", 25100 Nueva Gerona, Cuba

c) IPVCE "Rodolfo Carballosa Gutiérrez", 25300 La Demajagua, Cuba

† autor para la correspondencia

Recibido 15/3/2018; Aceptado 10/5/2018

En el curso de Física General se realiza el estudio del movimiento de cuerpos en el seno de un líquido, siendo su densidad mayor que la del líquido. Un problema no abordado en la bibliografía consultada es: ¿Hasta qué profundidad penetra una esfera en el seno de un líquido al caer libremente desde una altura  $H$  sobre la superficie libre, si su densidad es menor que la del líquido? Para el estudio de este fenómeno, se aplicó un modelo teórico que condujo a la obtención de una solución analítica para dicha profundidad. Además, se diseñó un experimento que, con el empleo de la técnica del video análisis utilizando Tracker para Windows, permitió determinar la profundidad realmente alcanzada. El objetivo que se persigue es, vinculando ambos resultados, estimar el intercambio de energía de una esfera en el impacto con la superficie del líquido.

In the course of General Physics it is possible to find the problem related to the study of the motion of bodies in a liquid when their densities are greater than that of the liquid. A problem not found in the bibliography consulted is: What depth will be obtained for a sphere when it falls freely from a height  $H$  above the free surface, if its density is less than that of the liquid? To carry out the study of this problem, a theoretical model was applied and an analytical solution was found to this depth. In addition, an experiment was designed based in the video analysis technique, using Tracker for Windows to know the real depth obtained. The main goal of this paper is to estimate the energy interchanged in the impact of the sphere on the surface linking both results.

PACS: Computers in education (Computadoras en la educación), 01.50.fh; video devices, educational (dispositivos de video, educacionales), 01.50.ff; computational techniques, mathematics (técnicas computacionales, matemática), 02.70.-c; laboratory experiments (experimentos de laboratorio), 01.50.Pa.

### I. INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento de una esfera que se ha dejado caer libremente desde una altura  $H$  sobre la superficie de un líquido, presenta un interés particular si la densidad de la esfera es menor que la densidad del líquido. Una manera sencilla de formular este problema pudiera ser la siguiente:

¿Hasta qué profundidad  $y$  se hunde una esfera de masa  $m$  y radio  $R$ , que se deja caer desde una altura  $H$  sobre la superficie de un líquido de viscosidad  $\eta$  y densidad  $\rho_L$  mayor que la densidad de la esfera  $\rho_c$ ?

En principio, este problema se puede subdividir en tres movimientos diferentes (Fig. 1):

- Caída libre de la esfera desde la altura  $H$ , hasta que su centro de masa se ubique a una distancia  $R$  sobre el nivel del líquido.
- Cruce de la esfera a través de la superficie del líquido, hasta que su centro de masa se ubique a una distancia  $R$  por debajo del nivel del líquido.
- Movimiento de la esfera en el seno del líquido hasta detenerse.

Según la Ley de Stokes [1], la fuerza de fricción que experimenta una esfera al moverse en el seno de un fluido

viscoso en régimen laminar de bajo número de Reynolds, es

$$F_r = 6\pi R\eta v, \quad (1)$$

donde  $R$  es el radio de la esfera,  $\eta$  la viscosidad del fluido y  $v$  la velocidad.

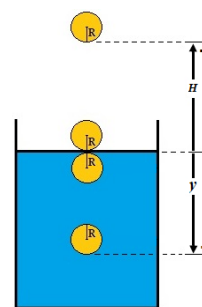


Figura 1. Esfera que cae libremente desde una altura  $H$  sobre la superficie libre de un líquido.

Cuando la esfera cae libremente desde la altura  $H$ , despreciando la resistencia del aire, en el momento que su centro de masa queda a una distancia  $R$  sobre el nivel del líquido, alcanza una rapidez

$$v_f = \sqrt{2gH}. \quad (2)$$

Esta rapidez disminuye durante el choque de la esfera con la superficie del líquido y continúa disminuyendo hasta el instante en que se detiene y comienza el ascenso.

Determinar el valor de la pérdida de energía en el impacto es una tarea en principio complicada, por lo cual, proponemos una metodología que permite estimarla, combinando métodos teóricos y experimentales, haciendo uso además de los recursos que ofrece la tecnología actual.

## II. MODELO TEÓRICO

Cuando la esfera comienza a sumergirse, además de la fuerza de gravedad  $F_g$ , aparece la fuerza de resistencia  $F_r$  del líquido y la fuerza de empuje o de Arquímedes  $F_A$ .

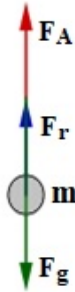


Figura 2. Diagrama de fuerzas.

En el proceso del cruce por la superficie del líquido, elaborar un modelo matemático que considere todos los factores que intervienen, resulta complicado; sin embargo, una vez que la esfera se encuentre totalmente sumergida, el problema es muy simple.

Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos la ecuación

$$F_r + F_A - F_g = ma, \quad (3)$$

donde

$$F_r = kv = 6\pi R\eta v, \quad (4)$$

$$F_A = \rho_L V_C g, \quad (5)$$

$$F_g = mg, \quad (6)$$

$m$  es la masa de la esfera,  $V_C$  su volumen,  $\rho_L$  la densidad del líquido,  $g$  la aceleración de la gravedad, y  $v$  la rapidez de la esfera durante su movimiento en el seno del líquido.

Sustituyendo (4)-(6) en (3), obtenemos la ecuación diferencial

$$kv + \rho_L V_C g - mg = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dy}. \quad (7)$$

La cual después de algunas operaciones, llamando  $v_0$  a la velocidad inicial de la esfera en el seno del líquido, y separando variables resulta

$$\int_0^y dy = \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{\left[ \frac{k}{m} v + \left( \frac{\rho_L}{\rho_C} - 1 \right) g \right]}, \quad (8)$$

cuya solución es [2]

$$y(\sqrt{H}) = Av_0 + B \ln |1 + Cv_0|, \quad (9)$$

donde

$$A = -\frac{m}{k}, \quad (10)$$

$$B = -\frac{m^2 g}{k^2} \left( \frac{\rho_L}{\rho_C} - 1 \right), \quad (11)$$

$$C = -\frac{k}{mg \left( \frac{\rho_L}{\rho_C} - 1 \right)}. \quad (12)$$

En (9), la variable  $y$  se ha expresado en función de la raíz de  $H$  ya que  $v_0$  depende de ella implícitamente.

La expresión (9), permite determinar el valor de la profundidad que alcanza la esfera cuando se encuentra en el seno del líquido conociendo su velocidad inicial.

Considerar a  $v_0$  como la rapidez  $v_f$  que tenía la esfera al llegar a la superficie, según (2), es una aproximación poco rigurosa pues evidentemente, durante el impacto pierde energía cinética, por tanto, considerarla, conduce a que la profundidad alcanzada según (9), sea mayor que la que realmente alcanza.

Llegado a este punto, se procedió al diseño de un experimento que permitiera determinar la profundidad real alcanzada por la esfera al caer desde la altura  $H$ .

## III. MODELO EXPERIMENTAL

En los últimos años, gracias al desarrollo de la Tecnología, se han abierto nuevos horizontes para el laboratorio de Física, en particular con las técnicas de video análisis [3-6], una de las cuales utilizamos.

Se realizó el siguiente experimento:

- Se dejó caer una esfera de 11,46 mm de diámetro y 0,66g de masa, desde diferentes alturas  $H$ , medidas desde la superficie libre del agua contenida en un recipiente de 150,00 mm de diámetro interior, hasta el borde inferior de la esfera (Fig. 1).
- Se tomó el video del fenómeno y luego, mediante el software libre Physics Tracker [7], se determinó la profundidad  $y$  alcanzada por el borde inferior de la esfera respecto a la superficie, antes de comenzar a ascender (Fig. 1).
- Se confeccionó una tabla de los valores de  $H$  y de la profundidad  $y$  alcanzada por la esfera (Tabla 1).
- Adicionalmente, se representaron los puntos  $(H, y)$  en un sistema de ejes coordenados utilizando el asistente matemático GeoGebra, y aplicando un ajuste logarítmico, se obtuvo  $y$  en función de  $H$

$$y(\sqrt{H}) = 0.0735 + 0.0236 \ln |f(\sqrt{H})|. \quad (13)$$

Tabla 1. Profundidad experimental alcanzada por la esfera en función de  $H$ .

$H$ (m)	$y$ (m)
0.062	-0.042
0.077	-0.045
0.102	-0.047
0.139	-0.052
0.180	-0.054
0.205	-0.056

Como se observa, esta función se encuentra en correspondencia con la obtenida en el modelo teórico (9) con la diferencia de que el ajuste considera al primer término constante.

#### IV. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE AMBOS MODELOS Y SU UTILIDAD

Como se esperaba, los valores obtenidos para la profundidad "teórica", son mayores que los obtenidos en el experimento (Tabla 2), ya que modelo teórico asume que la velocidad con que comienza a moverse la esfera una vez sumergida, es la misma que tenía antes de penetrar en el agua, cuando en realidad es menor.

Esta diferencia permite hacer una estimación de la pérdida de energía de la esfera durante el impacto.

Si un valor de profundidad  $y_i$ , obtenido experimentalmente, es sustituido en (9) obtenemos una ecuación trascendente para  $v_0$ , la cual, al ser resuelta [8], permite determinar la rapidez efectiva  $v_E$  con que la esfera debió comenzar a moverse en el líquido, para que la profundidad obtenida con el modelo teórico, coincida con la observada experimentalmente, esto es

$$\frac{y_i - Av_E}{B} - \ln|1 + Cv_E| = 0. \quad (14)$$

Tabla 2. Comparación de los resultados.

$H$ (m)	$y_{Exp}$ (m)	$y_{Teo}$ (m)	$v_f$ (m/s)	$v_E$ (m/s)	$\Delta E$ ( $10^{-4}$ J)
0.062	-0.042	-0.329	1.102	0.385	3.52
0.077	-0.045	-0.405	1.228	0.399	4.46
0.102	-0.047	-0.530	1.414	0.408	6.05
0.139	-0.052	-0.712	1.651	0.429	8.38
0.180	-0.054	-0.910	1.878	0.437	11.01
0.205	-0.056	-1.028	2.004	0.445	12.60

En la Tabla 2,  $y_{Exp}$  se refiere a la profundidad observada en el experimento,  $y_{Teo}$  a la obtenida por el modelo teórico (9) tomando la rapidez inicial en el líquido como la  $v_f$  obtenida en (2), o sea, sin considerar la energía perdida en el impacto,  $v_E$  la efectiva obtenida al resolver la ecuación trascendente, y  $\Delta E$  la diferencia de energía cinética que experimenta la esfera. Con estos valores, es posible hacer un ajuste lineal de la pérdida de energía en el impacto en función de  $H$ , esto es

$$\Delta E(H) = 0.0064H - 4 * 10^{-5}. \quad (15)$$

En la Tabla 3 se muestran los valores de  $H$ ,  $\Delta E$ , el error porcentual del ajuste y el porcentaje de energía perdida en el impacto.

Tabla 3. Error del ajuste obtenido para la pérdida de energía en el impacto con la superficie y % de energía perdida.

$H$ (m)	$\Delta E$ ( $10^{-4}$ J)	Error del ajuste	% de energía perdida
0.062	3.52	1.36	87.9
0.077	4.46	1.52	89.4
0.102	6.05	1.39	91.8
0.139	8.38	1.38	93.3
0.180	11.01	1.05	94.6
0.205	12.60	0.95	95.1

#### V. CONCLUSIONES

En general, el valor que se le concede al problema planteado es mostrar una vez más, cómo los métodos teóricos, y experimentales se complementan para resolver problemas de interés, en este caso la estimación de la energía que pierde una esfera en el impacto con una superficie líquida.

En particular, el diseño experimental aplicado permite apreciar la importancia del empleo de los recursos tecnológicos disponibles para el perfeccionamiento del trabajo en el laboratorio de Física. Evidentemente, esto hace posible abordar el estudio de situaciones prácticas que con los instrumentos tradicionales resultarían muy difíciles de concebir para lograr una precisión aceptable.

Por otra parte, también se pretende mostrar la importancia del uso racional de asistentes matemáticos, para la representación y ajuste de datos experimentales. Adicionalmente, este problema impone la necesidad del diseño e implementación de códigos para la solución de ecuaciones trascendentes, a partir de los métodos numéricos existentes.

Finalmente, consideramos que este estudio solo muestra una metodología de trabajo. Para obtener conclusiones más exactas respecto a la pérdida de energía en el impacto de una esfera con una superficie líquida, es necesario realizar un número mayor de mediciones con instrumentos de resolución mayor que la de los que disponemos. Además, para obtener más generalidad es preciso realizar experimentos variando el radio de la esfera, el radio interior del recipiente, y la densidad del líquido, entre otros parámetros.

#### REFERENCIAS

- [1] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, R. A. Freedman, Física Universitaria, 9na Ed. (Editorial Felix Varela, La Habana, Cuba, 2008), pp. 448.
- [2] A. Jeffrey and H.H. Day, Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, 4th Ed. (Academic Press, New York, USA, 2008), pp. 155.
- [3] C. Sirisathitkul, P. Glowtanong, T. Eadkong, Y. Sirisathitkul, Rev. Bras. Ensino Fis. 35(1), 1504 (2013).
- [4] S. Paricio-Muñoz, "Análisis de las dificultades en la comprensión de la Cinemática en Bachillerato. Evaluación del uso de Tracker para facilitar el aprendizaje". Tesis de Maestría, Universidad Internacional de La Rioja, Barcelona, 2014.

- [5] G. Méndez, S. Rodríguez, *Revista Tecné, Episteme y Didaxis* [ISSN: 2323-0126] (2014), pp. 734.
- [6] H.B. Gómez, "Implementación del programa Tracker como herramienta de análisis en algunas situaciones de cinemática y dinámica en dos dimensiones, aplicando el método de aprendizaje activo". Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales,

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2016.

- [7] *Physic Tracker*: (<http://www.cabrillo.edu/dbrown/tracker/>)
- [8] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, 2th Ed. (Cambridge, London, United Kingdom, 1997), pp. 355-359.

---

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) license.

