

# LA ÓPTICA DE UN SISTEMA DE LENTES GRUESAS: SU APLICACIÓN AL OJO HUMANO

## THE OPTICS OF A THICK LENS SYSTEM: ITS APPLICATION TO THE HUMAN EYE

D. JIMÉNEZ-MARTÍ, A. J. BATISTA-LEYVA<sup>†</sup>

Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas, Universidad de La Habana, 10400 La Habana, Cuba; abatista@instec.cu<sup>†</sup>

<sup>†</sup> autor para la correspondencia

Recibido 15/3/2018; Aceptado 15/5/2018

Las lentes ópticas son dispositivos utilizados en un sinnúmero de aplicaciones. Además, los seres vivos las han incorporado a las estructuras desarrolladas evolutivamente para observar el medio externo, denominadas ojos. Esto explica la importancia del estudio de la óptica de lentes en cualquier curso de Óptica Geométrica. Los libros de texto más difundidos, sin embargo, las tratan al nivel más elemental, limitándose a las lentes delgadas inmersas en aire. El presente trabajo tiene como objetivo deducir las ecuaciones que rigen el comportamiento de una lente gruesa y un sistema de dichas lentes, para el caso general de medios con diferente índice de refracción. Por último se aplican dichas ecuaciones al estudio de la óptica del ojo humano en dos modelos de la literatura. Los resultados obtenidos pueden servir de material docente para cursos de Óptica Geométrica y Óptica Oftalmológica.

Optical lenses are ubiquitous in technical and scientific applications as well as in animals. This explains the importance of developing the lens formulae in courses of geometrical optics. Textbooks, however, often give only an elementary discussion, limited to thin lenses in air. Our aim is to present the deduction of thick lens formulae in the general case of different media at both sides of it. These equations are finally used to obtain the optical parameters of a human eye for two models presented in the literature. This work could be of interest in courses of Geometrical and Ophthalmic Optics.

PACS: Lenses in optical systems (Lentes en sistemas ópticos), 42.79.Bh; ophthalmic optics (óptica oftálmica), 42.66.Ct; optical instruments (instrumentos ópticos), 07.60.-j

### I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de lentes son utilizados en un sinnúmero de equipos e instrumentos ópticos, como las cámaras fotográficas, los telescopios, microscopios etc. En los animales existen estructuras especializadas en la detección e interpretación de las señales luminosas que llegan del medio exterior, que se agrupan bajo el nombre genérico de “ojo” y que son en general sistemas ópticos. En particular el ojo humano es un sistema de dos lentes [1].

Un sistema de lentes se puede definir como un conjunto de lentes simples trabajando de manera conjunta.

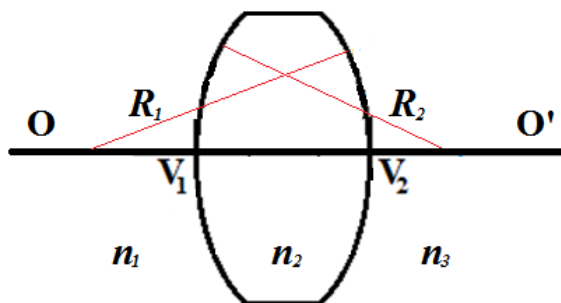


Figura 1. Lente simple. Se muestran los radios de curvatura de las superficies y los índices de refracción de los medios. La figura presenta simetría de revolución alrededor del eje óptico OO'.

Las lentes simples están formadas por dos superficies

refractoras cada una de las cuales separa dos dieléctricos (Fig. 1). Estas superficies, aunque pueden tener cualquier geometría, son por lo general esféricas, ya que estas son más fáciles de fabricar que las superficies esféricas (hiperbólicas, parabólicas, elípticas).

En la Fig. 1 se observan algunos elementos básicos de las lentes: los radios de curvatura de las superficies refractoras ( $R_1$  y  $R_2$ ) y los vértices  $V_1$  y  $V_2$ , que son los puntos de intersección del eje de simetría del sistema (eje óptico) con las superficies refractoras. Se ha considerado que los índices de refracción a ambos lados de la lente son diferentes.

Por lo general, para encontrar las ecuaciones que determinan las trayectorias de los rayos de luz a través de la lente, se consideran dos aproximaciones:

1. Rayos paraxiales: Los ángulos de inclinación de los rayos respecto al eje óptico son pequeños ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ).
2. Lente delgada: Si el espesor de la lente  $d = \overline{V_1 V_2} \ll R$ , se desprecia dicho espesor. En el caso que esto no se cumpla se dice que la lente es gruesa.

En una lente delgada, cuando los índices de refracción a cada lado de la lente son iguales ( $n_1 = n_2$ ), la ley que rige el paso de la luz por ella es muy sencillo y recibe el nombre de fórmula de Gauss

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}. \quad (1)$$

La ecuación (1) relaciona la distancia desde el objeto luminoso hasta la lente  $s_o$  con la distancia entre la lente y la imagen de dicho objeto  $s_i$ . En (1)  $f$  representa la distancia focal de la lente, que se calcula por la llamada fórmula del fabricante

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

En estas ecuaciones está implícito el convenio de signos que se usa en el libro de Óptica de Hecht [2]:

- $R > 0$  si el centro está a la derecha de la superficie.
- $s_o > 0$  si el objeto está a la izquierda de  $V_1$ .
- $s_i > 0$  si la imagen está a la derecha de  $V_2$ .

Los libros de Física General solo tratan la aproximación de lentes delgadas; muy pocos libros de Óptica tratan las lentes gruesas, a pesar de la importancia de estas. Por ejemplo, en [2] se presentan (sin demostración) las ecuaciones para una lente gruesa inmersa en aire. En este caso se cumple la ley de Gauss (1) si las distancias (incluyendo la distancia focal) se miden desde los llamados planos principales  $H_1$  y  $H_2$  (Fig. 2).

Estos son dos planos conjugados y unitarios, situados a distancias  $h_1$  y  $h_2$  de los vértices respectivos, las que se calculan según [2]:

$$h_1 = -\frac{(n_2 - 1)d}{n_2 R_2} f, \quad (3)$$

$$h_2 = -\frac{(n_2 - 1)d}{n_2 R_1} f, \quad (4)$$

En las ecuaciones anteriores  $d$  es el espesor de la lente a la altura del eje óptico.

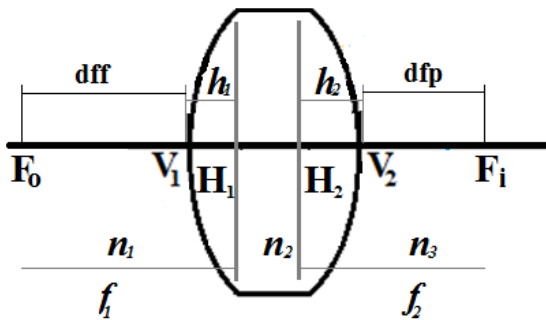


Figura 2. Lente gruesa. Se muestran los planos principales  $H_1$  y  $H_2$ , así como los focos objeto e imagen y las distancias focales.

Si las distancias calculadas por las ecuaciones (3) y (4) son positivas, los planos se encuentran a la derecha de los vértices respectivos; estarán a la izquierda si son negativas. La distancia focal de la lente ( $f_1 = f_2 = f$ ) es:

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_2 - 1)d}{n_2 R_1 R_2} \right). \quad (5)$$

En la Fig. 2 se recalca el hecho de que las distancias focales frontal ( $dff$ ) y posterior ( $dfp$ ) son en general diferentes, sin embargo  $f_1 = f_2$ , calculándose ambas por la ecuación (5).

Estas fórmulas no son aplicables si uno de los medios que rodea la lente no es aire. Pero ese es un caso muy importante solo sea, por ejemplo, porque en el ojo humano la córnea está rodeada por medios de distinto índice de refracción [3].

En la presente contribución se hace la deducción de las fórmulas que rigen el comportamiento de una lente gruesa y de un sistema de estas lentes, considerando el caso general de diferentes índices de refracción para todos los medios. Luego se aplican estas ecuaciones para calcular los parámetros ópticos del ojo humano. El trabajo puede ser útil como material didáctico para cursos avanzados de Óptica Geométrica y para cursos de Óptica Oftalmológica. Todas las figuras han sido elaboradas por los autores.

## II. DESARROLLO

### II.1. Obtención de las ecuaciones de una lente gruesa. Cálculo de la posición de los planos principales.

Sea la lente gruesa de la Fig. 3. La primera tarea es calcular el valor de  $h_1$ . Para esto se sitúa un objeto luminoso en el foco objeto de la lente (punto B). La idea será considerar la lente como dos superficies refractoras independientes.

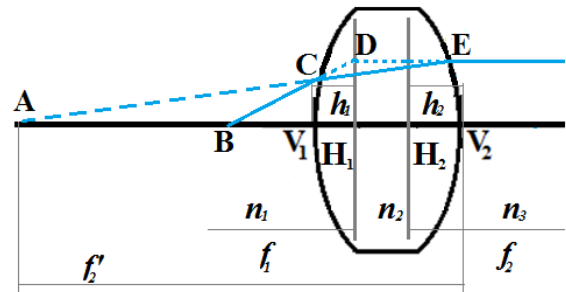


Figura 3. Un objeto luminoso situado en el foco objeto de la lente gruesa.

El rayo BC se refracta en C, llega a E y se refracta paralelamente al eje óptico. Prolongando el rayo CE encontramos el punto A, que sirve como objeto para la segunda superficie. Es obvio además que A es el foco objeto del segundo dióptrico y  $f'_2$  es su distancia focal objeto.

De la figura se deduce que  $\triangle ABC \sim \triangle CDE$  por tener todos sus ángulos iguales. Entonces se cumple

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}. \quad (6)$$

Considerando que son rayos paraxiales,  $\overline{CE} = d$ ,  $\overline{AC} = \overline{AV_1} = f'_2 - d$ ,  $\overline{DE} = d - h_1$  además  $\overline{AB} = f'_2 - f_1 - (d - h_1)$  donde ya se consideró el convenio de signos. Sustituyendo estas expresiones en (6) y despejando  $h_1$  se obtiene

$$h_1 = \frac{f_1 d}{f'_2}. \quad (7)$$

La ecuación del segundo dióptrico es [2]

$$\frac{n_2}{s_{o2}} + \frac{n_3}{s_{i2}} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}. \quad (8)$$

La imagen virtual del objeto en A sirve de objeto real para el segundo dióptrico. Ese objeto se encuentra en el foco objeto de dicho dióptrico, por lo que sustituyendo en (8) los valores  $s_{o2} = f'_2 \Rightarrow s_{i2} = +\infty$

$$f'_2 = \frac{n_2 R_2}{n_3 - n_2}. \quad (9)$$

Sustituyendo (9) en (7)

$$h_1 = -\frac{f_1 d}{n_2 R_2} (n_2 - n_3). \quad (10)$$

La ecuación (10) se reduce a la (3) para el caso de una lente rodeada de aire.

En la Fig. 4 se muestra el tránsito de un rayo que viene desde infinito por la lente gruesa. Haciendo un análisis similar al del punto anterior, vemos que  $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ . Entonces

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}. \quad (11)$$

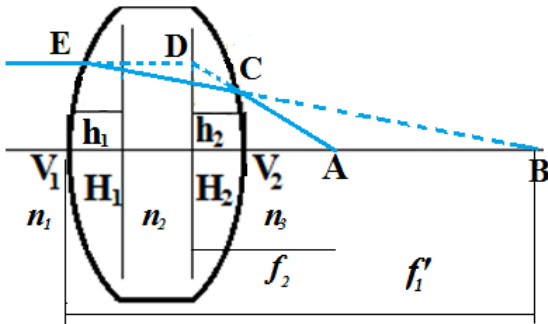


Figura 4. Formación de la imagen de un objeto en el infinito a través de una lente gruesa.

En la región paraxial  $\overline{CD} = -h_2$ ,  $\overline{AC} = \overline{AV_2} = f_2 - (-h_2)$ ,  $\overline{AB} = f'_1 - f_2 - (d - (-h_2))$ ,  $\overline{DE} = d - (-h_2)$ . Note el uso del convenio de signos. Al sustituir en (11) se obtiene

$$h_2 = -\frac{f_2 d}{f'_1}. \quad (12)$$

En el primer dióptrico se cumple

$$\frac{n_1}{s_{o1}} + \frac{n_2}{s_{i1}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}. \quad (13)$$

Como el objeto está en el infinito,  $s_{o1} = +\infty \Rightarrow s_{i1} = f'_1$ ; sustituyendo en (13)

$$f'_1 = \frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1}. \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (12)

$$h_2 = -\frac{f_2 d}{n_2 R_1} (n_2 - n_1). \quad (15)$$

Idéntica a la (4) para una lente inmersa en aire.

## II.2. Distancia focal de una lente gruesa

Ahora calcularemos los valores de las distancias focales de una lente gruesa que tiene dos medios distintos a ambos lados. Sea la lente de la Fig. 5.

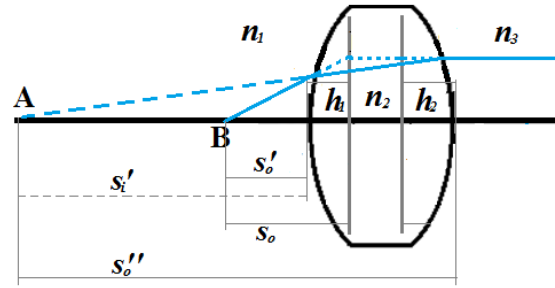


Figura 5. Cálculo de la distancia focal frontal  $f_1$ .

Consideremos un punto luminoso en B, que emite rayos que al pasar por la lente salen paralelos al eje óptico. De la figura se ve que en este caso  $s_o = f_1$ , pues B es el punto focal anterior. Entonces en el primer dióptrico

$$\frac{n_1}{s'_o} + \frac{n_2}{s'_i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}. \quad (16)$$

Note que en (16) las distancias se miden a partir del primer vértice.

Como  $s'_o = s_o - h_1$  y  $s_o = f_1$

$$\frac{n_1}{f_1 - h_1} + \frac{n_2}{s'_i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}. \quad (17)$$

En el segundo dióptrico

$$\frac{n_2}{s''_o} + \frac{n_3}{s''_i} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}. \quad (18)$$

Donde  $s''_o = -s'_i + d$ , por ser la distancia imagen del primer dióptrico negativa (está a la izquierda de la superficie). Además  $s''_i = +\infty$  lo que resulta en

$$\frac{n_2}{-s'_i + d} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}. \quad (19)$$

De aquí

$$s'_i = \frac{n_2 R_2 + d(n_2 - n_3)}{n_2 - n_3}. \quad (20)$$

Sustituyendo este valor en (17) y despejando  $f_1$  encontramos

$$f_1 = h_1 + \frac{n_1 R_1 [n_2 R_2 + d(n_2 - n_3)]}{(n_2 - n_1) [n_2 R_2 + d(n_2 - n_3)] - n_2 R_1 (n_2 - n_3)}. \quad (21)$$

Sustituyendo (10) en (21) y reorganizando obtenemos

$$f_1 = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1) [n_2 R_2 + d(n_2 - n_3)] - n_2 R_1 (n_2 - n_3)}, \quad (22)$$

de donde

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 R_1} - \frac{n_2 - n_3}{n_1 R_2} + \frac{d(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)}{n_1 n_2 R_1 R_2}. \quad (23)$$

Para determinar el valor de la distancia focal  $f_2$ , hacemos un proceso similar, relacionado con la Fig. 6.

En este caso es posible obtener, utilizando la ecuación del primer dióptrico

$$s'_i = \frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1}. \quad (24)$$

Utilizando la ecuación del segundo dióptrico obtenemos

$$f_2 = \frac{n_2 n_3 R_1 R_2}{(n_2 - n_3)[d(n_2 - n_1) - n_2 R_1] + n_2 R_2 (n_2 - n_1)}, \quad (25)$$

e invirtiendo

$$\frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_3 R_1} - \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} + \frac{d(n_2 - n_1)(n_2 - n_3)}{n_2 n_3 R_1 R_2}. \quad (26)$$

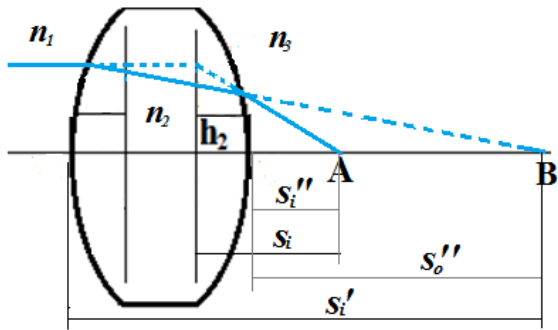


Figura 6. Cálculo de la distancia focal posterior  $f_2$ .

Comparando (23) con (26) se observa que en general  $f_1 \neq f_2$ . Sin embargo la potencia óptica de la lente es

$$D = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_3}{f_2}, \quad (27)$$

lo que permite escribir la ecuación de la lente como

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_3}{s_i} = D. \quad (28)$$

Además, de (27) se obtiene la relación entre las dos distancias focales de una lente gruesa

$$n_1 f_2 = n_3 f_1. \quad (29)$$

Definiendo la potencia óptica de las superficies refractoras como

$$D_1 = \frac{n_2 - n_1}{R_1}, \quad D_2 = \frac{n_3 - n_2}{R_2},$$

las ecuaciones (23) y (26) quedan

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n_2} D_1 D_2. \quad (30)$$

### II.3. Sistema de lentes

Sea un sistema de dos lentes con sus ejes ópticos coincidentes (sistema centrado, Fig. 7). Vamos a representar el sistema óptico a partir de sus planos principales  $H_1$  y  $H_2$  cuya posición se debe calcular. Le llamaremos  $s_o$  a la distancia objeto del sistema medida a partir del primer plano principal,  $s_i$  a la distancia imagen medida a partir del segundo plano principal. Las distancias focales objeto e imagen serán  $f_1$ ,  $f_2$  respectivamente.

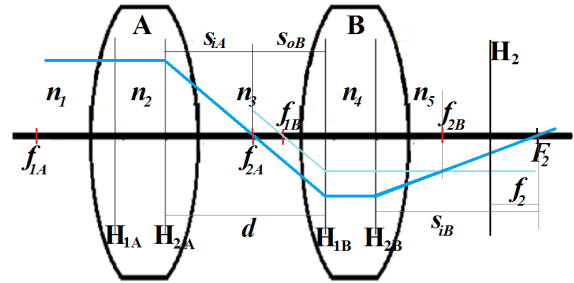


Figura 7. Paso de la luz a través de un sistema de lentes gruesas. Note en azul claro la construcción auxiliar para el trazado de rayos en la segunda lente. Se considera que cada medio tiene un índice de refracción diferente.

Las magnitudes relativas a cada lente las distinguiremos por los subíndices A para la primera y B para la segunda. Inicialmente calcularemos la distancia focal  $f_2$  y la posición del plano principal segundo. Consideremos un rayo procedente de infinito. Para él  $s_{oA} = s_o = +\infty$ ,  $s_{iA} = f_{2A}$ . Para la segunda lente se cumple que  $s_{oB} = d - f_{2A}$  mientras que para el sistema  $s_i = f_2$ .

La fórmula de Gauss para la segunda lente es

$$\frac{n_3}{s_{oB}} + \frac{n_5}{s_{iB}} = D_2 = \frac{n_3}{f_{1B}}. \quad (31)$$

De aquí se obtiene que

$$s_{iB} = \frac{n_5 f_{1B} (d - f_{2A})}{n_3 (d - f_{1B} - f_{2A})}. \quad (32)$$

La amplificación lateral del sistema es el producto de la amplificación de cada lente [2], así

$$M = M_A M_B, \quad (33)$$

$$-\frac{n_1 s_i}{n_5 s_o} = \left( -\frac{n_1 s_{iA}}{n_3 s_{oA}} \right) \left( -\frac{n_3 s_{iB}}{n_5 s_{oB}} \right), \quad (34)$$

de donde

$$f_2 = -\frac{s_{iA} s_{iB}}{s_{oB}}, \quad (35)$$

$$f_2 = \frac{n_5 f_{1B} f_{2A}}{n_3 (f_{1B} + f_{2A} - d)}. \quad (36)$$

Invirtiendo la ecuación se encuentra

$$\frac{n_5}{f_2} = \frac{n_3}{f_{1B}} + \frac{n_3}{f_{2A}} - \frac{n_3 d}{f_{1B} f_{2A}}. \quad (37)$$

Lo que resulta en

$$D_s = D_1 + D_2 - \frac{d}{n_3} D_1 D_2. \quad (38)$$

Se debe recalcar que en (38)  $d$  representa la distancia entre los planos principales segundo de la primera lente y primero de la segunda lente. La distancia entre el plano principal segundo de la segunda lente  $H_{2B}$  y el segundo plano principal del sistema  $H_2$  es

$$\overline{H_{2B}H_2} = |s_{iB}| - |f_2|, \quad (39)$$

$$h_2 = s_{iB} - f_2. \quad (40)$$

Sustituyendo (32) y (36) en (40) resulta

$$h_2 = -\frac{f_2 d}{f_{2A}}. \quad (41)$$

Si la distancia  $h_2$  es negativa el plano se encuentra a la izquierda de  $H_{2B}$ , a la derecha si es positivo.

Consideremos ahora el mismo sistema, pero los rayos parten de un punto tal que salen del sistema paralelamente al eje óptico, por tanto  $s_{iB} = s_i = +\infty$ . Es obvio que ese punto es el foco objeto de sistema, por lo que  $s_o = f_1$ . Se hará primero el cálculo de la distancia focal  $f_1$  y a partir de esta se calculará la posición del primer plano principal del sistema (ver Fig. 8).

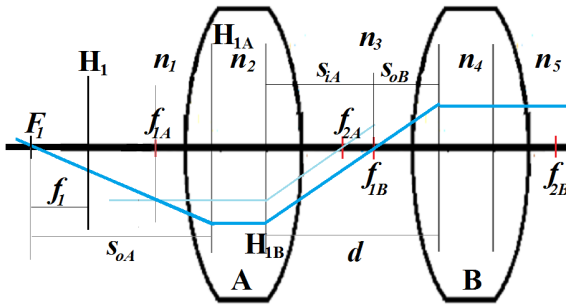


Figura 8. Paso a través de un sistema de lentes gruesas de la luz que parte de su foco objeto. Note en azul claro la construcción de rayos en la primera lente. Se considera que cada medio tiene un índice de refracción diferente.

Aplicando al sistema la ecuación (33) obtenemos

$$f_1 = -\frac{s_{oA}s_{oB}}{s_{iA}}. \quad (42)$$

Como  $s_{oB} = f_{1B}$ ,  $s_{iA} = d - s_{oB}$  de (42) se obtiene

$$f_1 = -\frac{s_{oA}f_{1B}}{d - f_{1B}}. \quad (43)$$

En la primera lente del sistema

$$\frac{n_1}{s_{oA}} + \frac{n_3}{s_{iA}} = D_1 = \frac{n_3}{f_{2A}}. \quad (44)$$

$$s_{oA} = \frac{n_1 f_{2A} (d - f_{1B})}{n_3 (d - f_{1B} - f_{2A})}. \quad (45)$$

Sustituyendo (45) en (43) se obtiene

$$f_1 = \frac{n_1 f_{1B} f_{2A}}{n_3 (f_{1B} + f_{2A} - d)}. \quad (46)$$

por lo que

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_3}{f_{1B}} + \frac{n_3}{f_{2A}} - \frac{n_3 d}{f_{1B} f_{2A}}. \quad (47)$$

La ecuación (47) nos lleva nuevamente a la ecuación (38). La distancia entre el primer plano principal de la primera lente  $H_{1A}$  y el primer plano principal del sistema  $H_1$  es

$$\overline{H_{1A}H_1} = |s_{oA}| - |f_1|, \quad (48)$$

$$-h_1 = s_{oA} - f_1. \quad (49)$$

Note que  $h_1$  es intrínsecamente negativa pues está medida a la izquierda de  $H_{1A}$ . Sustituyendo las ecuaciones (45) y (46) en (49) obtenemos

$$h_1 = \frac{f_1 d}{f_{1B}}. \quad (50)$$

El convenio de signos es el mismo que para  $h_2$ . Para un sistema de varias lentes se aplica este procedimiento iterativamente.

#### II.4. El ojo humano como un sistema óptico

El ojo humano está constituido por dos lentes positivas (convergentes) llamadas córnea y cristalino (ver Fig. 9). Ellas están separadas por el humor acuoso [4].

La córnea está constituida por cinco capas [5], sin embargo para caracterizar su comportamiento óptico es suficiente considerarla como un menisco cóncavo con índice de refracción  $n_{Co} \approx 1.376$  [6].

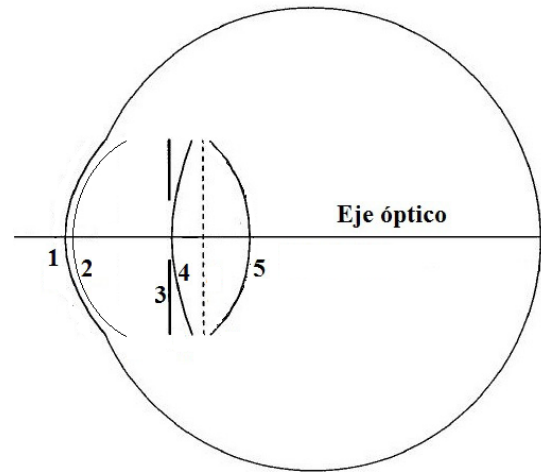


Figura 9. Esquema del ojo humano mostrando sus superficies refractoras. 1: Superficie anterior de la córnea, 2: Superficie posterior de la córnea, 4: Superficie anterior del cristalino, 5: superficie posterior del cristalino. Con el número 3 se indica el iris.

En la Fig. 9 la córnea está representada por las superficies 1 y 2. En general estas superficies son esféricas [7] y se pueden representar por la ecuación

$$x^2 + y^2 + (1 + Q)z^2 - 2zR = 0, \quad (51)$$

donde el origen de coordenadas está en el ápice de la superficie,  $x$  es el meridiano horizontal,  $y$  es el vertical,  $z$  es el eje de revolución,  $R$  es el radio en el ápice y  $Q$  es el parámetro de asfericidad, que especifica el tipo de superficie

cónica. Trabajando en la región paraxial podremos considerar las superficies esféricas.

El cristalino es una lente biconvexa que tiene una distribución de índices de refracción del tipo GRIN [8]. Sin embargo, debido a las complejidades asociadas con la medición de dicha distribución [9] y el cálculo del paso de los rayos por él [10], acostumbra a representarse por un índice de refracción equivalente  $n_{Cr} \approx 1.42$ . Entre la córnea y el cristalino se encuentra el humor acuoso, cuyo índice de refracción es algo mayor que el del agua. Los valores que utilizaremos serán  $n_{ac} \approx 1.336$  [7] y  $n_{ac} \approx 1.3374$  [4]. A continuación del cristalino se encuentra el humor vítreo, cuyo índice de refracción es  $n_{vi} \approx 1.336$ . En lo que sigue haremos los cálculos de las propiedades del ojo como sistema óptico considerando la región paraxial, utilizando los datos que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros geométricos e índice de refracción de la córnea y el cristalino. Los valores <sup>a</sup> son tomados de [7] y los <sup>b</sup> de [4].

	$R_1$ (mm)	$R_2$ (mm)	d (mm)	n
Córnea <sup>a</sup>	7.77	6.4	0.50	1.376
Córnea <sup>b</sup>	7.8	6.5	0.55	1.3771
Cristalino <sup>a</sup>	12.4	-8.10	4.0	1.42
Cristalino <sup>b</sup>	10.2	-6.0	4.0	1.42

Con los datos de la Tabla 1 y las ecuaciones (10), (15), (23) y (26) se encuentran las distancias focales y los planos principales de la córnea y el cristalino. Los valores se muestran en la Tabla 2. También se muestra la potencia óptica calculada según la ecuación (38).

En la Tabla 2 se observa la influencia de los radios de curvatura sobre la potencia óptica de la lente. Debe notarse que los datos de la referencia [7] se usaron originalmente para una lente con distribución de índices de refracción (GRIN), que en general tiene mayor potencia óptica que una lente de igual forma y dimensiones, pero con índice de refracción constante.

Tabla 2. Posición de los planos principales, valores de las distancias focales y potencia óptica de la córnea y el cristalino. Los valores <sup>a</sup> son calculados con los datos de [7] y los <sup>b</sup> con los datos de [4].

	$h_1$ (mm)	$h_2$ (mm)	$f_1$ (mm)	$f_2$ (mm)	D (D)
Córnea <sup>a</sup>	-0.054	-0.556	23.67	31.62	42.25
Córnea <sup>b</sup>	-0.058	-0.609	23.61	31.57	42.36
Cristalino <sup>a</sup>	2.30	-1.50	78.84	78.84	16.95
Cristalino <sup>b</sup>	2.41	-1.40	61.41	61.34	21.78

Usando las ecuaciones (50), (41), (46), (36), (38) y los valores de la Tabla 2 encontramos las posiciones de los planos principales, las distancias focales y la potencia óptica del ojo. Los valores se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Posición de los planos principales, valores de las distancias focales y potencia óptica del ojo. Los valores <sup>a</sup> son calculados con los datos de [7] y los <sup>b</sup> con los datos de [4].

	$h_1$ (mm)	$h_2$ (mm)	$f_1$ (mm)	$f_2$ (mm)	D (D)
Ojo <sup>a</sup>	1.34	-4.45	17.8	23.85	55.99
Ojo <sup>b</sup>	1.65	-4.30	16.9	22.30	59.91

Si se utilizan los parámetros del ojo y las distancias focales calculadas, veremos que para el ojo de la referencia [7], rayos que vengan desde el infinito formarán una imagen a una

distancia de 25.5 mm de la superficie anterior de la córnea, mientras que para el ojo de la referencia [4] la imagen se formará a una distancia de 24.21 mm. Esa es la longitud axial de un ojo "normal", por lo que dicho ojo será emétrepe, mientras que el anterior será algo hipermétrepe, si tiene las dimensiones normales.

La Fig. 10 muestra los planos principales y distancias focales de la córnea  $H_{1Co}$  y  $H_{2Co}$ . Note que ambos están fuera del menisco y que el segundo plano está más separado que el primero. Esto se debe a los valores de los índices de refracción y las diferencias en los radios de curvatura entre las dos superficies.

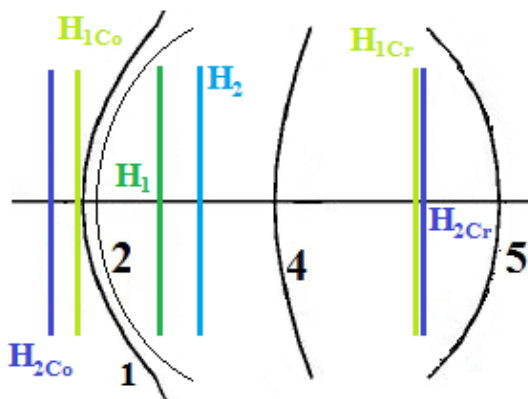


Figura 10. Disposición de los planos principales respecto a la posición de la córnea y el cristalino. La numeración de las superficies coincide con la usada en la Fig. 9.

Se presentan además los planos principales del cristalino  $H_{1Cr}$  y  $H_{2Cr}$ . Como ocurre con las lentes biconvexas, los planos principales están dentro de la lente.

En la Fig. 10 se muestran además los planos principales del sistema óptico completo. Un modelo simplificado del ojo hará uso de esos planos para resolver el paso de la luz. Si se desea una solución más precisa se debe utilizar un sistema computacional de trazado de rayos [3].

### III. CONCLUSIONES

Las ecuaciones obtenidas para las lentes gruesas son fácilmente reducibles al caso de lentes delgadas, al igual que al caso de medios con igual índice de refracción a ambos lados de la lente. El proceso de deducción es importante para la comprensión de la esencia de dichas fórmulas, por lo que debe incorporarse en los cursos de Óptica. El cálculo del sistema óptico del ojo humano es ilustrativo de la aplicación de dichas ecuaciones a un sistema real. Es un excelente ejemplo para incluirlo en una clase práctica de sistemas ópticos.

En una próxima contribución haremos la deducción de la posición de los planos principales de una lente GRIN, utilizando el cristalino como ejemplo de importancia práctica.

## REFERENCIAS

- [1] M. Idrees, *Int. J. Preclinical & Pharm. Res.* **6**, 7 (2015).
- [2] E. Hecht, *Optics*, 4ta Ed. (Addison Wesley, San Francisco, USA, 2002), pp. 243 – 246.
- [3] C. Muñoz-Villaescusa, O. Núñez-Chongo, A. J. Batista-Leyva, *Rev. Cubana Fis.* **31**, 35 (2014).
- [4] P. Artal, *Adv. Optics and Phot.* **6**, 340 (2014).
- [5] D. W. DelMonte, T. Kim, J. Cataract. Refract. Surg. **37**, 588 (2011).
- [6] R. Navaro, *J. Optom.* **2**, 3 (2009).
- [7] H. L. Liou, N. A. Brennan, *J. Optical Soc.* **14**, 1684 (1997).
- [8] B. K. Pierscionek, J. W. Regini, *Prog. Retin. Eye Res.* **31**, 332 (2012).
- [9] R. C. Cruz-Rodríguez, F. R. Rodríguez-Flores, A. J. Batista-Leyva, *Investigación Operacional*, **39**, 129 (2018).
- [10] R. C. Cruz-Rodríguez, A. L. Batista-Planas, O. Núñez-Chongo, C. Muñoz-Villaescusa, A. J. Batista-Leyva, *Rev. Cubana Fis.* **32**, 96 (2015).

---

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) license.

