

# EL ARMA SECRETA DE LA PRIMERA GUERRA MUNDIAL

## THE SECRET WEAPON OF THE GREAT WAR

J.G. TRIANA-LAVERDE<sup>a†</sup>, J.M. RUIZ-VERA<sup>a</sup>

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia; jtrianal@unal.edu.co<sup>†</sup>

<sup>†</sup> autor para la correspondencia

Recibido 26/2/2018; Aceptado 23/4/2018

Durante la primera guerra mundial el ejército alemán mostró al mundo su poder militar, diseñando armamento que desafiaba los límites tecnológicos y físicos conocidos. Entre estos diseños destaca el Wilhelmschütze, también conocido como cañón de París, que logró triplicar el alcance de las mejores armas de la época, además de alcanzar por primera vez escalas atmosféricas. Teniendo en cuenta datos conocidos sobre el cañón de París, se realiza la simulación y descripción matemática de la trayectoria descrita por un proyectil disparado por dicha arma, considerando las fuerzas de rozamiento, gravedad y centrífuga, además del efecto Coriolis.

During the World War I, the German army showed a great armament power, designing weapons that go beyond to the ever known technological and physical limits at that time. Among these, the most remarkable gun was the Wilhelmschütze, known as Paris gun. It surpassed almost three times the range of the best cannons of the time, and for the first time is reached the stratosphere by a projectile. In this paper, we use the reported data of the gun during the bombard to Paris, to develop a mathematical and computational model, that describes the trajectory of a Paris gun projectile. The model considers the drag force, gravity, centrifugal force and Coriolis effect.

PACS: Ordinary differential equations (Ecuaciones diferenciales ordinarias), 02.30.Hq; history of science (historia de la ciencia), 01.65.+g; approximation methods: equations of motion (métodos de aproximación: ecuación de movimiento), 04.25.-g.

### I. INTRODUCCIÓN

La compañía de acero Krupp fue la encargada del desarrollo armamentista de Alemania durante la primera guerra mundial [1]. Desde 1909 esta empresa estaba a cargo del diplomático Gustav Von Bohlen und Halbach, posteriormente conocido como Gustav Krupp, quien había contraído matrimonio con la heredera de Krupp, Bertha Krupp, el 15 de octubre de 1906 [2].



Figura 1. Gustav Von Bohlen y Bertha Krupp en 1927. Tomado de <http://www.thyssenkrupp.com>.

La nueva orientación de la empresa no fue bien vista por sus clientes en el exterior, sin embargo lograron consolidarse en el mercado alemán y en los países aliados de Alemania, recibiendo grandes beneficios por parte del gobierno sin perder su autonomía como empresa [3].

Posteriormente Krupp AG obtuvo grandes dividendos de los contratos armamentistas después de la primera guerra mundial, siendo encargados del rearme nacional para la segunda guerra mundial [4], para lo cual contaron con mano de obra de los campos de concentración [5], razón por la que fueron incluidos en los juicios de Nuremberg [6].

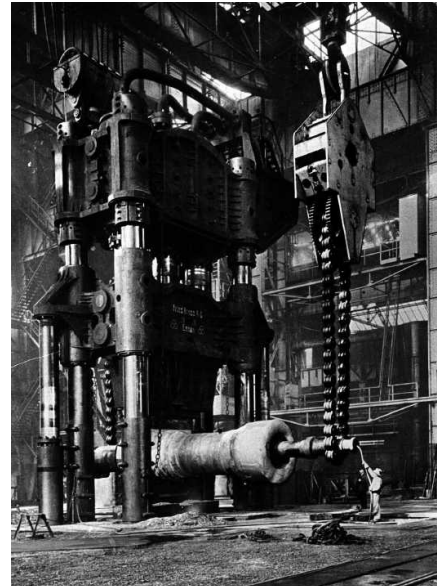


Figura 2. Fábrica de Krupp en 1929, tomado de <http://www.thyssenkrupp.com>.

Entre las armas desarrolladas por Krupp destacan los cañones de largo alcance, cuya fabricación estuvo a cargo del jefe de diseño de artillería Fritz Rausenberger [7], entre ellos: el cañón Big Bertha de calibre 420 mm, con un peso

de 47 toneladas, transportado en 5 secciones [8], utilizado en batallas en Francia y Bélgica, destacando la batalla de Verdún en 1916 [9]; el cañón *Wilhelmschütze*, o emperador *Wilhelm*, calibre 210 mm con 138 toneladas de peso, y una longitud alrededor de 34 metros [10], utilizado en el bombardeo a París que inició el 23 de Marzo de 1918, perpetrado desde los bosques de Crepy a una distancia cercana a los 120 km de París [11], por dicho bombardeo esta arma también es conocida como el cañón de París.

A menudo el cañón *Wilhelmschütze*, que en adelante llamaremos cañón de París, es confundido con el cañón *Big Bertha*; esta confusión se debe a que durante la guerra se denominó *Big Bertha* a todos los cañones de largo alcance alemanes [12].

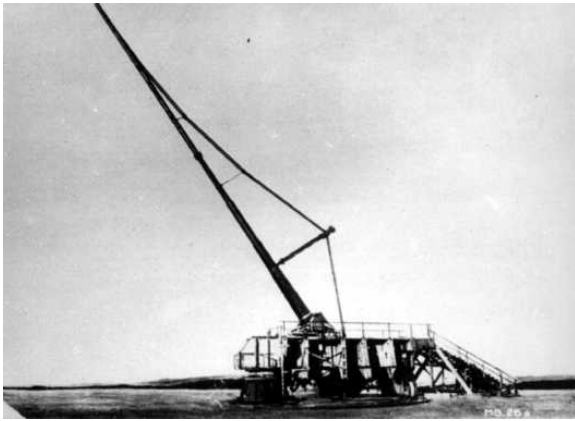


Figura 3. Cañón de París, 1918. tomado de: <http://www.thyssenkrupp.com>.

El cañón de París era considerada un arma temible debido a su alcance de 120 km, logrando casi triplicar los 48 km de alcance del *Luegenboom-Dunkirk* que era considerada por muchos el arma de mayor alcance de la época [13]. Sin embargo, la precisión del cañón de París estaba por debajo de lo normal para un arma de artillería [14], pese a ello era capaz de generar un gran impacto psicológico [15].

Debido a los avances de las fuerzas aliadas, las armas de largo alcance retornaron a Alemania donde se presume fueron destruidas [16], razón por la cual los aliados no lograron capturar el cañón de París. Posteriormente los cañones de largo alcance fueron prohibidos en el tratado de Versalles [17]. Pese a esto en la segunda guerra mundial apareció el cañón *Schwerer Gustav*, también conocido como cañón *Dora*, considerada el arma de artillería más grande utilizada en combate [18], además de diversas armas antiaéreas montadas en vías férreas, entre otras innovaciones [19].

La importancia de los cañones de largo alcance va más allá de su uso como armas, ya que el cañón de París logró ubicar por primera vez un objeto a escalas atmosféricas [20]. En esta dirección continuó el proyecto HARP, que en inglés significa *High Altitude Research Project*, iniciado en 1961 por la armada de Estados Unidos y el departamento de defensa de Canadá [21]. Como parte del proyecto HARP se construyó un cañón en Barbados, con el cual se lograron alturas entre 97 y 113 km [22]; el 19 de noviembre de 1966 uno de estos

cañones, diseñados por Gerald Bull, logró llevar un proyectil de 84 kg a una altura récord de 179 km [23].

El cálculo de la trayectoria de un proyectil sigue siendo un problema de interés ya sea por razones físicas [24], pedagógicas [25], o incluso para proponer innovaciones [26]. Por lo anterior, la modelación de la trayectoria de un proyectil, disparado por el cañón de París, resulta ser un problema adecuado en el desarrollo de un curso de modelamiento y simulación, de matemática aplicada, e incluso como proyecto de investigación para estudiantes de ciencias básicas o ingeniería, ya que corresponde a un problema en contexto que permite realizar simulaciones de situaciones reales, fomentando la comprensión de fenómenos físicos [27], además el marco histórico permite generar motivación en los estudiantes [28].

## II. CONSIDERACIONES INICIALES

El cañón de París era disparado con un ángulo de elevación de  $55.0^\circ$ , impulsando un proyectil de 120 kg, a una velocidad de salida aproximada de  $1.60 \times 10^3$  m/s [29], que equivale a más de cuatro veces la velocidad del sonido. En condiciones ideales, el proyectil recorre 245 km, logrando un tiempo de vuelo de 267 s y una altura máxima aproximada de  $8.76 \times 10^4$  m, en este caso el recorrido del proyectil es máximo al considerar un ángulo de elevación de  $45.0^\circ$ , no obstante esto no es cierto si se consideran otras fuerzas, distintas del campo gravitatorio uniforme, que afectan al proyectil durante su desplazamiento.

Dado que se desea estudiar el movimiento relativo de un objeto respecto a la tierra, es conveniente considerar un sistema coordenado con las siguientes características: El origen debe encontrarse en el centro de la tierra, de este modo un objeto ubicado en  $P$  tendrá asociado un vector posición  $r$  que va desde el origen hasta  $P$ . La rotación terrestre tiene velocidad angular  $\Omega$  con magnitud constante  $\omega$ , tomando como eje de rotación al eje  $z$  [30].

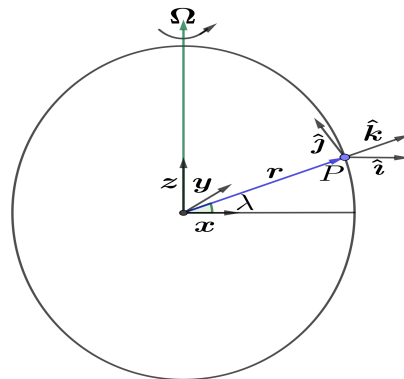


Figura 4. Sistemas de referencia considerados.

Debido a que el alcance del proyectil es pequeño en comparación con el radio terrestre, se considera la tierra localmente plana en el punto  $P$  y  $\lambda$  constante.

La velocidad de  $P$  con respecto al sistema de referencia inercial es

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}, \quad (1)$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}$  representa la velocidad de  $P$  con respecto al marco de referencia fijo a la tierra y  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  es inducido por la rotación de dicho marco [31]. Análogamente, se lleva a cabo el cálculo de la aceleración  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}}], \\ \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left[ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} \right], \\ \mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \left[ \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Como  $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}$ , y  $\frac{d}{dt} \left[ \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} \right] = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} + \ddot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}$  [31], entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left[ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} \right] + \left[ \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} + \ddot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} \right], \\ \mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} + \ddot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}, \\ \mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} + \ddot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Como la velocidad de rotación terrestre se asume constante se tiene que  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} = 0$ , por lo tanto

$$\ddot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} - \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]. \quad (4)$$

La aceleración  $\mathbf{a}$  se debe a las fuerzas de gravedad y rozamiento, que se consideran como las únicas que actúan sobre el proyectil, mientras que  $-\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$  y  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}}$  son aceleraciones que corresponden a las fuerzas que surgen debido a la no inercialidad del sistema fijo a la tierra, fuerza centrífuga y de Coriolis respectivamente [32].

### II.1. FUERZAS DE CORIOLIS

La fuerza de Coriolis es de gran importancia para la simulación de la trayectoria descrita por un proyectil, disparado por un cañón de largo alcance, ya que no contemplarla puede generar desviaciones en la trayectoria planeada, como se evidenció en 1914 durante el enfrentamiento entre las armadas inglesa y alemana conocido como la batalla de las Malvinas, islas ubicadas cerca de Argentina, durante la cual los proyectiles de los cañones disparados por la armada inglesa sufrían una desviación aproximada de 100 m respecto al objetivo, debido a que sus armas estaban calibradas para contrarrestar el efecto Coriolis en el hemisferio norte [33].

Dado que  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \cos(\lambda)\hat{\mathbf{j}} + \omega \sin(\lambda)\hat{\mathbf{k}}$ , como se muestra en [34], y considerando el vector posición  $\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}} + r_z\hat{\mathbf{k}}$ , y la velocidad  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}|_{\text{obj}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$ , se obtiene que la aceleración de Coriolis  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ , obtenida en la ecuación (4), es dada por

$$-2\omega \left[ (v_z \cos(\lambda) - v_y \sin(\lambda))\hat{\mathbf{i}} + v_x \sin(\lambda)\hat{\mathbf{j}} - v_x \cos(\lambda)\hat{\mathbf{k}} \right], \quad (5)$$

donde  $\lambda$  corresponde a la latitud del lugar y  $\omega$  corresponde a la magnitud de la velocidad angular terrestre  $\boldsymbol{\Omega}$ , como se muestra en la Fig. 4.

Para calcular  $\omega$  se tiene en cuenta que el día sideral medio tiene una duración cercana a 23 h 56 min [35], equivalente a  $8.61 \times 10^4$  s; la diferencia del día sideral medio respecto a las 24 h de un día no es considerable en un periodo corto de tiempo, no obstante genera una desviación cercana a medio día transcurridos mil años. De este modo la velocidad angular terrestre es  $2\pi$  radianes por día sideral medio, luego  $\omega = 7.29 \times 10^{-5}$  rad/s.

Dado que el recorrido y la altura máxima del proyectil son pequeños en comparación con el radio terrestre, se considera la tierra localmente plana y  $\lambda$  constante durante el movimiento; además al ser  $\omega$  constante, se observa que  $\boldsymbol{\Omega}$  constituye un campo uniforme en el sistema de referencia local, presentado en la Fig. 4.

### II.2. FUERZA CENTRÍFUGA

La aceleración debida a la fuerza centrífuga, obtenida en la ecuación (4), es dada por  $\mathbf{a}_c = -\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ . Por lo anterior, la aceleración centrífuga es perpendicular a  $\boldsymbol{\Omega}$ , y actúa hacia afuera de la tierra [36], como se muestra en la Fig. 5.

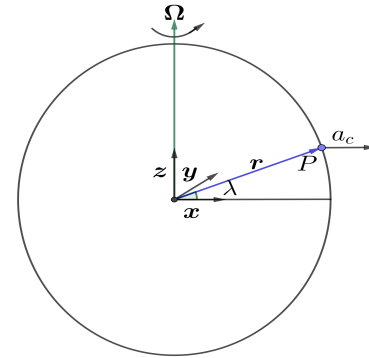


Figura 5. Aceleración centrífuga.

Por lo tanto, la aceleración centrífuga en el punto  $P$  es dada por  $\mathbf{a}_c = R \cos(\lambda)\omega^2 \mathbf{r}_\perp$ , donde  $\mathbf{r}_\perp$  denota la dirección de  $\mathbf{a}_c$  que, como se aprecia en la Fig. 5, es ortogonal a  $\boldsymbol{\Omega}$  [37]. Por lo anterior, la aceleración centrífuga en  $P$  es dada por

$$\mathbf{a}_c = R \cos(\lambda)\omega^2 [-\sin(\lambda)\hat{\mathbf{j}} + \cos(\lambda)\hat{\mathbf{k}}]. \quad (6)$$

### II.3. FUERZA GRAVITACIONAL

La ley de gravitación universal afirma la existencia de una fuerza de atracción entre dos cuerpos, además muestra que dicha fuerza es proporcional al producto de las masas de los cuerpos en interacción, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. En este caso la interacción es tierra-proyectil, por lo tanto la magnitud de la fuerza gravitacional queda descrita como

$$F_{\text{gravedad}} = G \frac{M_T M_P}{d^2}, \quad (7)$$

donde  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  es la constante de gravitación universal,  $M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$  es la masa terrestre [38],  $M_p$  la masa del proyectil,  $d$  la distancia entre los cuerpos. En particular se puede estimar que  $d = R + h$ , donde  $R$  es el radio promedio terrestre,  $6.36 \times 10^6 \text{ m}$  [39], y  $h$  la altura a la que se encuentra el proyectil, medida desde la superficie; obteniendo así que la fuerza gravitacional, presentada en la ecuación (7), depende únicamente de la altura  $h$ .

#### II.4. FUERZA DE ROZAMIENTO

En este artículo se considera que el rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, del mismo modo que en [40], y que la resistencia del aire decrece exponencialmente con la altura, debido a la menor densidad del aire a mayor altura, como se muestra en [41]; con lo cual la fuerza de rozamiento, siguiendo [42], queda descrita como

$$F_{\text{rozamiento}} = ke^{-\frac{z}{L}}|v|v, \quad (8)$$

donde  $k$  es un coeficiente que depende de la sección transversal del proyectil y el medio en que se desplaza [43], y  $L = 1.00 \times 10^4 \text{ m}$  es la escala atmosférica.

### III. MODELO MATEMÁTICO

En virtud de la segunda ley de Newton, y considerando que el proyectil sufre las fuerzas de gravedad, arrastre, de Coriolis y centrífuga, la fuerza total sobre el proyectil es dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{gravedad}} + \mathbf{F}_{\text{rozamiento}} + \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{centrífuga}}. \quad (9)$$

Considerando que la fuerza actúa de manera radial

$$aM_p = -\frac{GM_T M_p}{(R+h)^2} \hat{r} - ke^{-\frac{z}{L}}|v|v - 2M_p \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - M_p \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (10)$$

Dividiendo en  $M_p$  y tomando  $\beta = \frac{k}{M_p}$ , se obtiene que

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_T}{(R+h)^2} \hat{r} - \beta e^{-\frac{z}{L}}|v|v - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (11)$$

Considerando las ecuaciones (5) y (6) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\beta|v|v_x e^{-\frac{z(t)}{L}} - 2\omega[v_z \cos(\lambda) - v_y \sin(\lambda)], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\beta|v|v_y e^{-\frac{z(t)}{L}} - 2\omega v_x \sin(\lambda) - R\omega^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{-GM_T}{(R+z(t))^2} - \beta|v|v_z e^{-\frac{z(t)}{L}} + 2\omega v_x \cos(\lambda) + \\ &\quad + R\omega^2 \cos^2(\lambda), \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $x$  representa la dirección oeste-este,  $y$  representa la dirección sur-norte,  $z$  representa la altura,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  corresponden a la posición del proyectil en el instante  $t$ ;  $M_T$  la masa terrestre,  $R$  el radio promedio terrestre,  $\omega$  la

magnitud de la velocidad angular terrestre,  $\lambda$  la latitud del lugar,  $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  corresponde a la magnitud de la velocidad.

Dado que el cañón de París tenía un alcance aproximado de 120 km [44], y disparaba proyectiles de 120 kg [45], se estima  $\beta$  numéricamente de tal manera que al disparar con un ángulo de  $55.0^\circ$ , sin considerar la fuerza de Coriolis ni la fuerza centrífuga, el alcance sea 120 km con un error absoluto menor a un metro; por lo tanto  $\beta = 3.16 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ , obteniendo así  $k = 3.80 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ .

Cabe destacar que el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto en la ecuación (12) es no lineal e involucra ecuaciones diferenciales de orden 2, por lo cual buscar una solución analítica no es conveniente, siendo necesario aplicar métodos numéricos; en particular se aplica el método de Runge-Kutta de orden 4, conocido como RK4, ya que posee un alto orden de convergencia [46].

Debido a que el método de Runge-Kutta trabaja sobre ecuaciones diferenciales de orden 1, es necesario realizar un cambio de variables adecuado al sistema de ecuaciones diferenciales, con el fin de reducir el orden de las ecuaciones; considerando las variables  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  definidas como

$$u_1 = x, \quad u_2 = \frac{dx}{dt}, \quad u_3 = y, \quad u_4 = \frac{dy}{dt}, \quad u_5 = z, \quad u_6 = \frac{dz}{dt}. \quad (13)$$

Se reescribe el sistema de 3 ecuaciones de orden 2, descrito en la ecuación (12), mediante las variables  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ , obteniendo así el siguiente sistema de 6 ecuaciones diferenciales de orden 1

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= -\beta|v|u_2 e^{-\frac{u_5}{L}} - 2\omega[u_6 \cos(\lambda) - u_4 \sin(\lambda)], \\ u_3' &= u_4, \\ u_4' &= -\beta|v|u_4 e^{-\frac{u_5}{L}} - 2\omega u_2 \sin(\lambda) - R\omega^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda), \\ u_5' &= u_6, \\ u_6' &= \frac{-GM_T}{(R+u_5)^2} - \beta|v|u_6 e^{-\frac{u_5}{L}} + 2\omega u_2 \cos(\lambda) + R\omega^2 \cos^2(\lambda), \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $|v| = \sqrt{u_2^2 + u_4^2 + u_6^2}$ . El sistema de ecuaciones diferenciales es considerado con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad u_2 = v_0 \cos(\theta) \cos(\alpha), \\ u_3 &= 0, \quad u_4 = v_0 \cos(\theta) \sin(\alpha), \\ u_5 &= 0, \quad u_6 = v_0 \sin(\theta), \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial del proyectil,  $\alpha$  es el ángulo de azimut y  $\theta$  el ángulo de elevación del cañón.

### IV. RESULTADOS

En este artículo se supone que un proyectil en el aire durante su recorrido sufre las fuerzas de gravitación y rozamiento, además de las fuerzas centrífuga y de Coriolis. Considerando las fuerzas mencionadas anteriormente, se

realiza una simulación de un disparo con el cañón de París teniendo en cuenta los siguientes datos: latitud  $\lambda = 51.0^\circ$ , aproximadamente la latitud de París [47], ángulo de azimut  $0^\circ$ , ángulo de elevación  $55.0^\circ$ , con una velocidad inicial del proyectil de  $1.60 \times 10^3$  m/s. Los resultados son presentados a continuación.

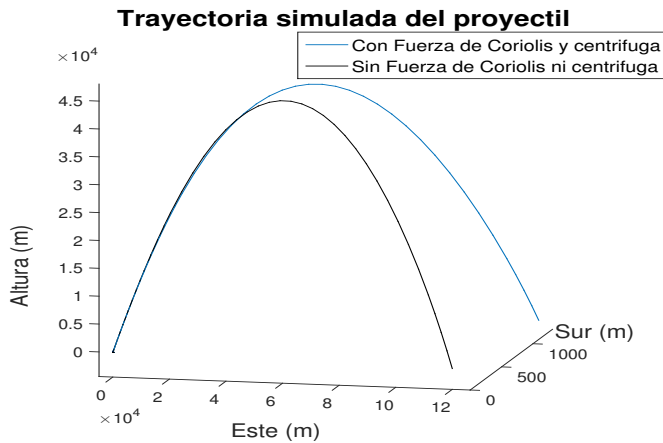


Figura 6. Simulación considerando y despreciando la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga.

El proyectil dura  $2.00 \times 10^2$  s en el aire, alcanzando una altura máxima de  $4.65 \times 10^4$  m, ubicando el proyectil en la parte superior de la estratosfera [48]. En la Fig. 6 se observa la desviación en la trayectoria debido a la fuerza de Coriolis y a la fuerza centrífuga, que resulta ser del orden de  $1,59 \times 10^3$  m en dirección sur; esto muestra que si bien las fuerzas de Coriolis y centrífuga no afectan la trayectoria tanto como lo hacen las fuerzas de gravedad y arrastre, generan una desviación considerable.

Al realizar un recorrido del orden de kilómetros la curvatura terrestre toma importancia. Debido a que el desplazamiento es pequeño, en comparación con el radio promedio terrestre, se supone que la tierra es redonda en el segmento donde se desplaza el proyectil, lo que permite obtener el ángulo barrido por la trayectoria simulada mediante la expresión  $R\phi = l$ . Tomando el radio promedio terrestre  $R = 6.36 \times 10^6$  m y el recorrido del proyectil  $l = 1.21 \times 10^5$  m se obtiene que  $\phi = 1.91 \times 10^{-2}$  rad, es decir  $\phi = 1.09^\circ$ .

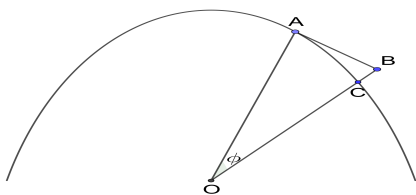


Figura 7. Representación del ángulo barrido por la trayectoria del proyectil, y el horizonte observado desde el lugar de disparo.

Conociendo el ángulo de barrido  $\phi$ , se determina cuanto recorre el proyectil por debajo del horizonte del cañón. En la Fig. 7, el punto A es el lugar de salida del proyectil y el punto C es el lugar de llegada; se aprecia que la longitud de

los segmentos OA y OC es  $R$ , mientras que la longitud del segmento AC es  $l$ ; si se denomina  $E$  a la longitud del segmento BC y  $X$  a la longitud del segmento AB, en la Fig. 7 se aprecia que  $X = R \tan(\phi)$ . Por el teorema de Pitágoras se obtiene que  $(R + E)^2 = R^2 + X^2$  por lo tanto  $E = \sqrt{R^2 + X^2} - R = 1.13 \times 10^3$  m. Por lo anterior se concluye que el blanco se encuentra cerca de un 1 km por debajo del horizonte del cañón.

Suponiendo que se conoce la ubicación de un blanco, resulta natural cuestionarse acerca de los ángulos de azimut y elevación que permitan impactar el blanco. La búsqueda de dichos ángulos no es tarea sencilla, sin embargo mediante la aplicación de métodos numéricos pueden estimarse, debido a que las funciones recorrida en las direcciones planteadas son funciones continuas.

Considerando un blanco que se encuentra a 100 km en dirección este y 1 km en dirección norte, y suponiendo que el disparo se considera exitoso si el proyectil cae en un rango de 10 m se obtiene que el ángulo de elevación a tomar es  $66.82^\circ$  y el ángulo de azimut es  $1.45^\circ$ ; en cuyo caso el proyectil cae a menos de 4 m del blanco en dirección norte y menos de 1 m en dirección este. El proyectil dura cerca de  $2.28 \times 10^2$  s en el aire, recorriendo  $7.85 \times 10^2$  m por debajo del horizonte del observador. Si se desprecian la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga, se impacta el blanco considerando el ángulo de elevación cercano a los  $67.02^\circ$  y el ángulo de azimut cercano a  $0.57^\circ$ .

## V. CONCLUSIONES

La aceleración gravitacional puede calcularse como se describe en la ecuación (7), o considerando un campo uniforme y homogéneo, tomando el valor constante  $g$ . En ambos casos los resultados obtenidos son similares ya que la altura lograda por el proyectil  $z(t)$ , medida desde la superficie, es pequeña en comparación con el radio promedio terrestre  $R$ , por lo cual  $g$  y  $\frac{GM_T}{(R+z(t))^2}$  son muy cercanos, para cualquier  $t$ .

En la simulación realizada de un disparo con el cañón de París, presentada en la Fig. 6, el proyectil efectúa un recorrido vertical cercano a un kilómetro por debajo del horizonte del observador, por lo cual el no considerar la curvatura terrestre puede generar problemas en la precisión del disparo.

La corrección del efecto Coriolis se lleva a cabo mediante una leve modificación en los ángulos de disparo [49], lo que puede llevar a pensar que este efecto es irrelevante; sin embargo, al considerar la fuerza de Coriolis se observa un incremento del orden de  $7.10 \times 10^2$  m en el recorrido en sentido este, y una desviación del orden de  $1.30 \times 10^3$  m en dirección sur, con respecto a la trayectoria simulada al considerar únicamente las fuerzas de arrastre y de gravedad, presentada en la Fig. 6.

Dado que  $\Omega \times (\Omega \times r)$  es de magnitud proporcional a  $\omega^2$ , con  $\omega = 7.29 \times 10^{-5}$  rad/s, puede pensarse que la fuerza centrífuga es despreciable. No obstante, al considerar la fuerza centrífuga se observa una desviación en sentido sur de  $3.00 \times 10^2$  m y un incremento del orden de  $1,20 \times 10^3$  m en el recorrido en sentido este, con respecto a la trayectoria

simulada al considerar únicamente las fuerzas de arrastre y de gravedad, presentada en la Fig. 6.

La modelación de problemas como el cálculo de la trayectoria de un proyectil permite poner en práctica los conocimientos de mecánica clásica y álgebra vectorial, induciendo en el estudiante la necesidad de extender los conceptos adquiridos en dichas áreas, con la finalidad de reconocer que al considerar fuerzas adicionales a la fuerza de gravedad se obtiene un modelo físico más acertado, permitiendo una descripción detallada de la trayectoria descrita por una partícula en el espacio-tiempo.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al comité editorial por las valiosas sugerencias realizadas.

## REFERENCIAS

- [1] R. Overy, *War and economy in the third reich*, (Oxford University Press, New York, USA, 1994), pp. 119-142.
- [2] H. James, *A history of legendary German firm*, (Princeton University Press, New Jersey, USA, 2012), pp. 123-225.
- [3] A. Axelrod, *Encyclopedia of world war II*, (Library of congress cataloging, New York, USA, 2007), pp. 502.
- [4] Chief of counsel for prosecution of axis criminality. *Nazi conspiracy and aggression*, Vol 1. (United States government printing, Washington, USA, 1946), pp. 64.
- [5] H. Fischer and A. McDonald, *Yearbook of international humanitarian law*, (T.M.C Asser Press, The Hague, Netherlands, 2002), pp. 350.
- [6] The united nations war crimes commission. *Law reports of trials of war criminals Volume X: The i.g. farben and Krupp trials*, (The united nations war crimes commission by his majesty's stationery office, London, United Kingdom, 1949), pp. 58-102.
- [7] P. Khrell, *History of Shock Waves, Explosions and Impact: A Chronological and Biographical Reference*, (Springer-Verlag, Leipzig, Germany, 2009), pp. 196,459.
- [8] A. Mroz, *American Military Vehicles of World War I*, (Mc Farland & company, North Carolina, USA, 2009), pp. 168.
- [9] M. Romanychn and M. Rupp, *42cm "Big Bertha."and German siege artillery of world war I*. (Osprey Publishing, Oxford, United Kingdom, 2014), pp. 23-47.
- [10] D. Burg and E. Purcell, *Almanac of World War I*, (The University Press of Kentucky, Kentucky, USA, 1998), pp. 201.
- [11] N. Saltonstall, *Out Here at the Front: The World War I Letters of Nora Saltonstall*. (Northeastern University Press, Michigan, USA, 2004), pp. 132.
- [12] J, Lepage, *The fortifications of Paris*, (McFarland, North Carolina, USA, 2006), pp. 234.
- [13] H. Miller, *The Paris gun: the bombardment of Paris by the German long range guns and the great German offensives of 1918*, (George G. Harrap & co LTD, London, United Kingdom, 1930), pp. 74.
- [14] S. Tucker, *The European powers in the First World War*, (Routledge, New York, USA, 2013), pp. 540.
- [15] A. Huyon, *Rev. His. des armées*. 253, 4, (2008).
- [16] S. Tucker, *A global chronology of conflict*, Vol 2. (ABC-CLIO, California, USA, 2010), pp. 1798.
- [17] W. Sims, *Leadership in Science and Technology: A Reference Handbook*, Vol 1. (Sage publications Inc, Los Ángeles, USA, 2012), pp. 797-803.
- [18] A. Bolonkin, *IJAS*. 2, 2 (2013).
- [19] Military intelligence service. *German antiaircraft artillery, special series No 10*. (War department, Washington, USA, 1943), pp. 14-45.
- [20] D. Homsher, *American Battlefields of World War I, Château-Thierry-then and now*. (Battleground productions, California, USA, 2006), pp. 53.
- [21] G. Bull and C. Murphy, *Paris Kanonen - The Paris Guns (Wilhelmgeschütze) and Project HARP*, (Verlag E.S. Mittler Sohn, 1991)
- [22] A. Godefroy, *Defence and discovery: Canada's military space program, 1945-1974*. (UBC Press, Vancouver, Canada, 2011), pp. 65.
- [23] D. Darling, *The Complete Book of Spaceflight: From Apollo 1 to Zero Gravity*. (John Wiley & sons, New Jersey, USA, 2003), pp. 180.
- [24] K. Yabushita, M. Yamashita and K. Tsuboi, *J. Phy. A: Math.Theor.* 40, 29 (2007).
- [25] A. Mudau, *Med. J. Soc. Sci.* 5, 8 (2014).
- [26] A. Bolonkin, *IJEE*. 3, 6 (2013).
- [27] F. Ornek, *Int. J. Environ. Sci. Ed.* 3, 2 (2008).
- [28] P. Heering and D. Osewold, *Constructing scientific understanding through contextual teaching*. (Frank & Timme, Leipzig, Germany, 2007), pp. 314.
- [29] A. Venzon, *The United States in the First World War: An Encyclopedia*, (Routledge, New York, USA, 2013), pp. 435-436.
- [30] W. Greiner, *Classical Mechanics*, 2nd Ed. (Springer, New York, 2010), pp. 9-21.
- [31] F. Beer, E. Johnston, D. Mazurek, P. Cornwell and E. Eisenberg. *Vector mechanics for engineers*, 9th Ed. (Mc Graw Hill, New York, USA, 2010), pp. 971-975.
- [32] L. Hand and J. Finch, *Analytical mechanics*, (Cambridge University Press, New York, USA, 1998), pp. 267.
- [33] R. Lopez, *Torsores*, (Editorial Tebar, Madrid, España, 2005), pp. 19.
- [34] N. de Mestre, *The mathematics of projectiles in Sport*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990), pp. 93-96.
- [35] P. Duffett, *Easy PC Astronomy*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997), pp. 23.
- [36] W. Lowrie, *Fundamentals of Geophysics*, (Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1997), pp. 35-36.

- [37] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*. (University of Toronto Press, Toronto, Canada, 1970), pp. 100-102.
- [38] P. Hewitt, *Conceptual Physics*. 9na Ed. (Addyson Wesley, Juarez, México, 2009), pp. 156-157.
- [39] H. Estrada, J. Ruiz y J. Triana, *Mat. Ens. Un.* **19**, 1 (2011).
- [40] R. Warburton, J. Wang and J. Burgdorfer, *JSSM*. **3**, 1 (2010).
- [41] P. Mohazzabi and J. Fields, *Can. J. Phys.* **82**, 3 (2004).
- [42] P. Mohazzabi and J. Shea, *Am. J. Phys. Teach.* **64**, 10 (1996).
- [43] R. Resnick, D. Halliday and K. Krane. *Física Vol 1, 4a Ed.* (Compañía editorial continental, México, 2001), pp. 131.
- [44] W. Hosch, *America at war World War I: People, Politics, and Power*, (Britannica Educational Publishing, New York, USA, 2010), pp. 89.
- [45] J. Kinard, *Artillery: An illustrated history of its impact*. (ABC-CLIO, California, USA, 2007), pp. 257.
- [46] G. Sewell, *The numerical solution of ordinary and partial differential equations*, (John Wiley & sons, New Jersey, USA, 2005), pp. 52-53.
- [47] P. Laplace, *Mécanique Céleste Vol 2*, (Hillard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, USA, 1832), pp. 334.
- [48] K. Mohanakumar, *Stratosphere Troposphere Interactions: An Introduction*, (Springer, New York, USA, 2008), pp. 8-10.
- [49] J. Maitland, *Field Art. J.* **8**, 3 (1918).

---

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) license.

