MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE: DETERMINANDO LA CONSTANTE DE FASE

SIMPLE HARMONIC MOTION: FINDING THE PHASE CONSTANT

C. Osaba-Rodríguez

Departamento de Física, Universidad Tecnológica de La Habana, "José Antonio Echeverría" (CUJAE), 19390 La Habana, Marianao, La Habana, Cuba; carloso@automatica.cujae.edu.cu

Recibido 30/1/2019; Aceptado 23/5/2019

El tratamiento de las oscilaciones mecánicas en los cursos de Física General suele iniciarse con el estudio del Movimiento Armónico Simple en un sistema compuesto de un cuerpo y un resorte. En la obtención de la ley de movimiento en tales sistemas la determinación de la constante de fase resulta particularmente trabajosa entre los estudiantes. Para la determinación de dicha constante algunos textos presentan una relación matemática que simplifica el procedimiento al punto de conducir a errores. Por ello se discute la determinación de la constante de fase para este tipo de movimiento.

The treatment of mechanical oscillations in General Physics courses usually begins with the study of Simple Harmonic Motion in a system composed of a block attached to the end of a spring. To obtain the law of motion for such system involves finding the phase constant as a difficult step for students. To determine the phase constant requires operating with two independent equations related with the particle's initial speed and position. Some textbooks oversimplify the procedure and obtain the phase constant using only one equation related to the initial conditions of the motion. How to determine the phase constant for such oscillatory systems is discussed.

PACS: Harmonic oscillators (osciladores armónicos), 03.65.Ge, Kinematics of particles (cinemática de partículas), 45.50.-j, 83.10.Pp, Mechanical vibrations (vibraciones mecánicas), 46.40.-f

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento oscilatorio reviste gran importancia para la Física y aparece en diversas escalas, desde las oscilaciones de moléculas hasta las de una viga empotrada o un cuerpo celeste.

Si bien en muchos casos lo esencial en tal movimiento radica en la frecuencia o la amplitud de las oscilaciones, en los cursos de Física General están presentes los ejercicios en que disponiendo de los parámetros de un sistema oscilatorio y las condiciones iniciales del movimiento, se solicita obtener la correspondiente ley de movimiento lo que entraña, entre otros asuntos, determinar la constante de fase.

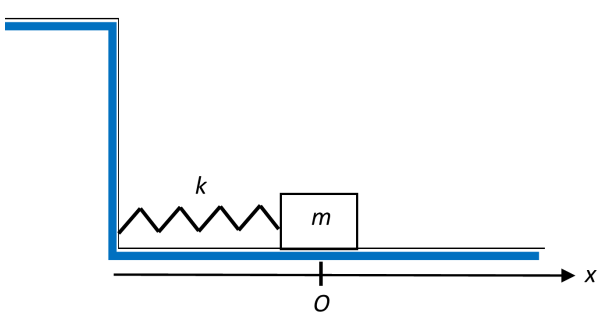

Figura 1. Sistema cuerpo-resorte.

De los diversos sistemas físicos con oscilaciones que corresponden al Movimiento Armónico Simple (MAS), el Sistema Cuerpo – Resorte mostrado en la Figura 1 es frecuentemente tomado como punto de partida pues su análisis dinámico resulta relativamente sencillo en pos de obtener la ecuación de movimiento.

El modelo correspondiente a un sistema cuerpo – resorte se apoya en las siguientes suposiciones:

1. Un cuerpo de masa m, sujeto a un resorte de constante elástica k que tiene su otro extremo empotrado en una pared, se desliza sobre una superficie horizontal.
2. Se desprecia la fricción entre el cuerpo y la superficie.
3. El cuerpo se considera como un cuerpo rígido y la masa del resorte es despreciable en comparación con la del cuerpo.
4. El resorte obedece a la Ley de Hooke

Si bien la suposición 2 apunta a la fricción seca entre el cuerpo y la superficie, también ha de despreciarse el efecto de fuerzas disipativas, como las viscosas.

La suposición 3 expresa que las propiedades elásticas radican en el resorte y las inerciales en el cuerpo, por lo que el sistema posee parámetros concentrados.

De la suposición 4 se desprende que el resorte admite tanto extensiones como compresiones sin que sus espiras se toquen entre sí.

En un montaje experimental de este sistema, los resortes helicoidales habitualmente empleados se mantendrían rectos bajo tracción pero se doblarían en compresión. Por ello un montaje experimental práctico podría lograrse con un resorte a cada lado del cuerpo, ambos ligeramente estirados. En el modelo teórico, en cambio, el resorte se mantiene recto en todos los casos.

La aplicación de la segunda ley de Newton para el cuerpo en su movimiento a lo largo de la superficie conduce a,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{1}$$

Si bien esta ecuación diferencial, caracterizada por los parámetros m y k, rige el movimiento abordado, el planteamiento completo del problema ha de acompañarse de las condiciones iniciales. Tratándose de una ecuación de segundo orden, dichas condiciones han de contener el valor de la función incógnita –la ecuación de movimiento $x(t)$– y de su primera derivada, que evaluadas en el instante inicial $t = 0$ corresponden respectivamente a la posición inicial y la velocidad inicial:

$$x(t = 0) = x_0, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt}(t = 0) = v_0. \tag{3}$$

De tal modo el conjunto de ecuaciones 1 a 3 constituye el planteamiento completo del problema que permitiría obtener la ecuación de movimiento con sus parámetros evaluados para un caso dado.

La solución general de este problema admite la forma,

$$x(t) = B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t), \tag{4}$$

aunque suele resultar más conveniente,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{5}$$

En la ecuación 5 A es la amplitud, ω la frecuencia angular y φ la constante de fase.

La frecuencia angular está dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

De 5 puede obtenerse la expresión de la velocidad,

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi). \tag{6}$$

A partir de 5 y 7, las expresiones para la posición y la velocidad iniciales son respectivamente:

$$x_0 = A\cos\varphi, \tag{7}$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi. \tag{8}$$

Operando con las ecuaciones 8 y 9 puede obtenerse la expresión de la amplitud,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \tag{9}$$

Con el objeto de obtener una expresión para determinar la constante de fase φ, algunos textos optan por formar un cociente con las expresiones 8 y 9 para eliminar la amplitud,

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{-\omega A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = -\omega\tan\varphi. \tag{10}$$

y obtener:

$$\varphi = \arctan -\frac{v_0}{\omega x_0}. \tag{11}$$

Si bien la ecuación 11 es cierta, su presentación en un texto inducirá a algunos estudiantes a emplearla para hallar el valor de la constante de fase, aceptando el resultado de la arcofunción que brinda la calculadora empleada.

Mas resulta que 11 por sí sola no resulta suficiente para obtener de manera unívoca y correcta el valor de la constante de fase, ya que a un valor dado de $\tan\varphi$ corresponden dos valores del argumento φ en el intervalo de 0 a 2π radianes. Del mismo modo disponiendo de los valores de x_0 y A, de 8 puede obtenerse el valor de $\cos\varphi$, lo que en general conduce a dos valores posibles para φ; y análogamente a partir de los valores de v_0, ω y A, de 9 puede obtenerse el valor de $\sin\varphi$, lo que también conduce a dos valores posibles para φ en el intervalo citado. Es la consideración conjunta de los posibles valores de φ provenientes de al menos dos ecuaciones independientes lo que permite hallar el valor correcto de la constante de fase.

La operación efectuada con las ecuaciones 8 y 9 para obtener 11 o 12 si bien elimina la presencia de la amplitud, conlleva una pérdida de información para la determinación de la constante de fase.

Vale resaltar que si una pareja de valores de posición y velocidad iniciales x_0 y v_0 corresponden a un valor de φ y por tanto a una ecuación de movimiento, tomar otra pareja con los mismos valores absolutos pero con los signos opuestos conduciría a otro valor de φ y con ello a otra ecuación de movimiento, mientras que en ambos casos la ecuación 11 proporciona el mismo resultado para $-v_0/\omega x_0$, y aparentemente igual valor de φ.

II. DETERMINACIÓN DE LA CONSTANTE DE FASE EN DIVERSOS TEXTOS

Textos de diversas épocas, tras exponer la teoría del MAS, se refieren a la determinación de los parámetros del sistema oscilatorio, entre ellos la constante de fase.

En [1] tras haberse planteado la solución de la ecuación de movimiento como $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ se declara que a partir de $x_0 = A\sin\varphi$ y $v_0 = \omega A\cos\varphi$ pueden determinarse A y φ, mas no se explica el procedimiento. Posteriormente, operando con una solución en la forma $\theta = \theta_0\sin(\omega_0 t + \phi)$ correspondiente a un movimiento pendular, se plantea que $\phi = \sin^{-1}(\theta_1/\theta_0)$, donde θ_1 es el valor de θ para $t = 0$, igualmente sin exponer un algoritmo de trabajo.

En [2] no se proporciona un método general para la determinación de la constante de fase. La exposición contiene un ejemplo en el que a partir de los valores de frecuencia angular y de posición y velocidad iniciales ($\omega = 5,00$ rad/s, $x_0 = 5,00$ cm, $v_0 = -0,100$ m/s) se determina de 11 $\tan\varphi$ ($\tan\varphi = 0,400$), y de ahí $\varphi = 0,121\pi$ rad. Si bien este valor de φ es correcto, constituye un caso que podría calificarse de feliz, pues a partir de un valor positivo de $\tan\varphi$ se brinda como respuesta y única alternativa el valor de φ ubicado en el primer cuadrante, sin considerar la posibilidad de que φ esté ubicado en el tercer cuadrante.

En [3] se halla un valor de φ y se sugiere una forma de verificar si el mismo es correcto. En concreto, se presenta un sistema cuerpo – resorte con sus valores de masa, constante elástica, así como de posición y velocidad iniciales. Los valores de ω, x_0 y v_0 conducen a un valor negativo de $\tan\varphi$ y de 12 se obtiene un valor de φ que resulta correcto, el cual se emplea junto a otros resultados para obtener la ecuación de movimiento $x(t)$. El ejemplo concluye invitando al lector a comprobar si la ecuación de movimiento obtenida satisface las condiciones iniciales, lo que pudiera indicar que el valor seleccionado de φ no es correcto y debe explorarse el otro valor que proporciona $\tan\varphi$.

En [4] mediante un ejemplo se muestra un método correcto para la determinación de la constante de fase. Dicho ejemplo considera un sistema del que se conocen su frecuencia angular así como la posición y velocidad iniciales. Con empleo de 8 se halla $\cos\varphi$ y los dos posibles valores de φ en el intervalo de 0 a 2π, los que son sustituidos en 9 para hallar la velocidad inicial, seleccionándose el que brinda el valor correcto de v_0

Si bien este procedimiento es irreprochable, un ejercicio al final del capítulo pide demostrar que la relación general entre los valores de posición inicial, velocidad inicial y constante de fase es

$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}, \tag{12}$$

lo que puede conducir a algunos estudiantes a suponer que tal ecuación es suficiente para la determinación de φ, cuando es solo una condición necesaria que conduce a dos valores posibles de la constante de fase los que han de someterse a una comprobación adicional, tal como ilustró el ejemplo del texto.

En [5] no se brinda un método para hallar la constante de fase. Mediante un ejemplo a partir de los valores de frecuencia angular y de posición y velocidad iniciales, se obtiene mediante 11 el valor de $\tan\varphi$ y de ahí el valor correcto de la constante de fase para el ejemplo, mas no se considera otra posibilidad para su valor en el intervalo de 0 a 2π.

En [6] se formula la ecuación de movimiento como $x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, planteándose que la solución se obtiene tras determinarse A mediante 10 y θ mediante 13.

En [7] se brindan indicaciones correctas para obtener la constante de fase a partir de 13, aclarándose que dicha ecuación se satisface para dos valores del argumento entre $-\pi$ y π, y que ha de tomarse el que brinda los signos correctos para el seno y el coseno en las condiciones iniciales. Si bien dicho texto no incluye un ejemplo numérico, las indicaciones que brinda son suficientes para determinar de forma adecuada la constante de fase.

En [8] mediante un ejemplo en el que se dispone de los valores de amplitud y de posición y velocidad iniciales, se obtienen de la expresión para la posición inicial dos posibles valores de la constante de fase, y de la correspondiente a la velocidad inicial otros dos valores de dicha constante, tomándose el valor coincidente. Así este texto ilustra una forma correcta para la determinación de la constante de fase, y lo logra sin emplear una ecuación que vincule la constante de fase con la frecuencia angular y la posición y velocidad iniciales. Si en ese texto tal ecuación se obtuviera, no sería como 12, pues la ecuación de movimiento es formulada como,

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{13}$$

por lo que la expresión de la velocidad de oscilación es,

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi), \tag{14}$$

y se obtendría, a diferencia de 12, el resultado,

$$\varphi = \arctan\frac{\omega\omega x_0}{v_0}. \tag{15}$$

III. DETERMINACIÓN DE LA CONSTANTE DE FASE COMO UNA ARCOFUNCIÓN

Si bien el procedimiento expuesto en [8] es correcto, una variante consiste en comenzar determinando solo el cuadrante en que se localiza la constante de fase.

Un problema frecuente en el estudio del MAS consiste en partir de un sistema cuerpo – resorte del que se conocen la masa del cuerpo, la constante elástica del resorte, así como la posición y velocidad iniciales del cuerpo, y se pide determinar la ecuación de movimiento 5 con sus parámetros evaluados. Para ello calcular mediante 6 la frecuencia angular y mediante 10 la amplitud no presenta dificultades.

Luego a partir del valor de la posición inicial se determina de 8 el signo de $\cos\varphi$ y para el intervalo entre 0 y 2π, los dos cuadrantes en que puede situarse el valor de φ. De modo similar a partir del valor de la velocidad inicial se determina de 9 el signo de $\sin\varphi$ y los dos cuadrantes en que puede localizarse φ. Obviamente la constante de fase se ubica en el cuadrante coincidente en las dos determinaciones anteriores.

Conocido el cuadrante en que se ubica φ, basta emplear una de las ecuaciones 8 o 9 o 12 para hallar el valor de la constante de fase.

La determinación de la constante de fase se simplifica cuando $\cos\varphi$ adopta valores como 1 o -1, o si de 9 se obtienen esos valores para $\sin\varphi$, pues cada uno de tales casos conduce a una sola opción para la constante de fase en el intervalo de 0 a 2π.

Determinar ϕ mediante una calculadora a partir de una de las expresiones 8, 9 o 12 operando con la arcofunción correspondiente requiere el cuidado de verificar si el resultado que brinda la calculadora se encuentra en el cuadrante correcto. De lo contrario es necesario obtener el otro resultado de la arcofunción mediante las relaciones trigonométricas necesarias.

IV. CONCLUSIONES

Si bien en el tratamiento del MAS la habilidad de determinar la constante de fase no ha de sobreestimarse, capacitar a los que estudian tal movimiento en su obtención correcta puede reportar utilidad. Una constante de fase también aparece en el movimiento oscilatorio infra-amortiguado, así como en la formulación de las ondas viajeras armónicas unidimensionales.

La determinación de los coeficientes de la solución de una ecuación diferencial a partir de condiciones iniciales (o de frontera en otros casos) es una habilidad importante en el estudio de la Física, y hallar la constante de fase para un MAS puede ser una pequeña contribución a tan importante objetivo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. Kittel, W. D. Knight, M, A. Ruderman, Mecánica, Berkeley Physics Course, volumen 1, Segunda edición, Editorial Reverté, S. A. 1989, pp. 212-215.

[2] R. A. Serway, J. W. Jewett Jr, Physics for Scientists and Engineering with Modern Physics, Brooks/Cole Cencage Learning. 2014, p. 457.

[3] F. W. Sears, M. Zemansky, H. D. Young, R. A. Freedman, Física Universitaria, Décimo segunda edición, Volumen 1, Pearson Educación, México, 2013, p. 428.

[4] R. Resnick, D. Halliday, K. Krane, Física Vol. 1, Cuarta edición, Compañía Editorial Continental S. A. de C. V., México, 1996, pp. 360-361.

[5] P. A. Tipler, G. Mosca, Physics for Scientist and Engineers, Fifth edition, Extended version, Worth and W. H. Freeman, 1997, p. 407.

[6] K. R. Symon, Mechanics, Third edition, Addison Wesley Publishing Company, 1971 p. 45.

[7] I. V. Saveliev, Curso de Física General, volumen 1, Editorial Mir, Moscú, 1984, p. 204.

[8] F. W. Sears, Mecánica, movimiento ondulatorio y calor, Edición Revolucionaria, La Habana, 1968, pp. 305-306.