

# ENSEÑANZA DE MÉTODOS NUMÉRICOS A TRAVÉS DE UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA BASADA EN ARDUINO: EL MECANISMO DE LAS 4 BARRAS REVISITADO

## TEACHING NUMERICAL METHODS THROUGH A DIDACTIC ARDUINO-BASED TOOL; THE 4-BAR LINKAGE CASE REVISITED

E. SERRANO-PÉREZ<sup>†</sup>

UNITEC MÉXICO - Campus Atizapán, Universidad Tecnológica de México, Boulevard Calacoaya 7, Capistrano, Cd. Adolfo López Mateos, Estado de México, México, 52970; edgar.serrano@my.unitec.edu.mx<sup>†</sup>

<sup>†</sup> autor para la correspondencia

Recibido 24/4/2020; Aceptado 4/3/2021

In this work, an educational tool for teaching numerical bisection and secant methods through its hardware implementation with an Arduino Due based card is presented. It is an accessible practice for the university level in which students who are not familiar with the programming languages can learn both numerical methods and the Arduino programming language due to its accessibility and simplicity. To verify results and as a means of debugging programs in the Arduino language, a spreadsheet is also used. As a case study, the classic problem of the 4-bar mechanism is revisited from a technological perspective, using a 32-bit microcontroller as a calculation tool. It is expected that development of traditional practices which are reviewed from a technological approach applied to real case studies, will encourage students to develop new prototypes and tangible technological developments by using the software and hardware tools to implement algorithms of numerical methods that solve complex engineering and physics problems.

En el presente trabajo se presenta una herramienta educativa para la enseñanza de los métodos numéricos de bisección y secante a través de su implementación en hardware con una tarjeta basada en Arduino Due. Se trata de una práctica accesible para nivel universitario en la cual los estudiantes que no se encuentran familiarizados con los lenguajes de programación pueden aprender paralelamente métodos numéricos y el lenguaje Arduino dado su accesibilidad y sencillez. Para verificar resultados y como un medio de depuración de los programas en lenguaje Arduino además se utilizó una hoja de cálculo. Como caso de estudio se revisita el problema clásico del mecanismo de 4 barras desde una perspectiva tecnológica, al utilizar un microcontrolador de 32 bits como herramienta de cálculo. Se espera que el desarrollo de prácticas tradicionales que revisitadas desde un enfoque tecnológico aplicado a casos de estudio reales, incentive a los estudiantes a desarrollar nuevos prototipos y desarrollos tecnológicos tangibles al contar con las herramientas de software y hardware para implementar algoritmos de métodos numéricos que resuelvan problemas complejos de física e ingeniería.

PACS: Computer use in laboratory (uso de la computadora en experimentos y aparatos de laboratorio laboratorio), 01.50.Pa; demostrativos en la enseñanza de la física), 01.50.My.

el laboratorio), 01.50.Lc; laboratory experiments and apparatus demonstration experiments in physics education (experimentos

La materia de métodos numéricos forma parte de las asignaturas de tronco común para la mayoría de los planes de estudio de universidades e institutos de formación superior, principalmente en las áreas de ingeniería. Los métodos numéricos son considerados como una herramienta esencial para el estudio del comportamiento de fenómenos físicos complejos, utilizando modelos matemáticos que permiten obtener soluciones de manera aproximada. Como una guía para los alumnos se han publicado diversas obras para ser tomadas como referencia en el área, sin embargo en su mayoría se percibe que fueron escritos por profesores de matemáticas, por lo que hay pocos casos de estudio que se enfocan y aplican en el mundo real [1]. Aunque es posible dictar el curso a través del uso de papel y calculadora, el esfuerzo de los estudiantes se incrementa toda vez que deben ser cuidadosos con las operaciones que realizan de forma manual [2]. Se debe recalcar que el verdadero potencial de los métodos numéricos se alcanza al ser implementados en sistemas de cómputo [3], los cuales tienen la capacidad de automatizar

los procesos hasta alcanzar una determinada condición, por ejemplo, la obtención de un error relativo asociado a una solución válida del problema. Considerando que en ocasiones alumnos de diferentes carreras de Ingeniería Mecánica, Civil, Electrónica, Ambiental y Química entre otras, acuden a un curso común, el uso de hojas de cálculo ha mostrado ser una herramienta útil para implementar métodos numéricos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje [3], [4]. La mayoría de los estudiantes ya se encuentran familiarizados con el uso de hojas de cálculo, fundamentalmente con el uso de la función de arrastre que permite automatizar los procesos de cálculo en filas y columnas. Este conocimiento previo, es de gran ayuda para los estudiantes al implementar métodos numéricos usando la hoja de cálculo. Se ha observado que la implementación de los métodos numéricos en otros lenguajes de programación consume un mayor tiempo y esfuerzo. En algunos casos, los estudiantes se enfocan en el aprendizaje de los distintos lenguajes de programación para su implementación [1], [2], [4]. La situación se acentúa para

aquellos que han tenido poca o nula instrucción previa en el área de programación.

Considerando que se debe fomentar el desarrollo de las destrezas y nuevas habilidades de los estudiantes de distintas áreas para afrontar su futuro profesional, se ha propuesto un proyecto que fomenta la implementación de los algoritmos de bisección y secante en lenguaje Arduino. Recientemente se ha reportado el análisis de temas como interpolación, diferenciación e integración numérica utilizando la plataforma Arduino [5]. Se encontró que el estudio de problemas reales utilizando hardware de bajo costo, motiva el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, el objetivo de este trabajo se centra en promover el uso de hardware accesible, que permita estimular e incentivar el aprendizaje de métodos numéricos para aproximar la raíz de una ecuación: el método de bisección y la secante.

La implementación se realiza utilizando hardware accesible y de bajo costo, retomando como caso de estudio el mecanismo clásico de las 4 barras [6]. La propuesta tiene la intención de que en un futuro próximo, los estudiantes puedan desarrollar prototipos y desarrollos tecnológicos tangibles, que den solución a los problemas de distintas áreas de la física e ingeniería a través del uso de los métodos numéricos. Para este trabajo, se han considerado los múltiples beneficios observados al utilizar Arduino como una herramienta de aprendizaje [7]. Por su parte, la tarjeta Raspberry Pi ha mostrado su potencial como herramienta educativa; se ha reportado la implementación de métodos numéricos enfocados en resolver un problema tradicional, como lo es la carga y descarga de un circuito RC [8]. Para la implementación de esta propuesta, se ha decidido utilizar la tarjeta basada en Arduino Nano; considerando que tiene un precio más reducido y el lenguaje de programación simplificado basado en C, resulta amigable con los nuevos usuarios.

La exploración de problemas y experimentos clásicos de laboratorio física, utilizando dispositivos móviles y tarjetas educativas, se ha incrementado recientemente [9], [10]. Esto ha permitido abordar problemas tradicionales con un enfoque tecnológico; el uso de dispositivos digitales le brinda a los estudiantes una nueva perspectiva para el desarrollo de aplicaciones tangibles en el mundo real. Se espera que este tipo de experiencias durante su formación académica, promueva el desarrollo de dispositivos electrónicos que se comuniquen con teléfonos inteligentes, además de las herramientas de hardware disponibles, interconectadas a través del internet de las cosas. El desarrollo de dispositivos electrónicos debe enfocarse en solucionar los problemas de una sociedad cada vez más digitalizada.

En este trabajo, el caso de estudio analizado corresponde a la ecuación clásica de Freudenstein [6] para la síntesis del mecanismo de 4 barras, el cual ha sido utilizado como una ecuación modelo para el aprendizaje de diferentes métodos numéricos que obtienen la raíz de ecuaciones no lineales [11]. Se integra el componente tecnológico de hardware accesible y de bajo costo para la implementación de los algoritmos de bisección y secante en una tarjeta basada en Arduino Nano. El problema que se desea resolver a través del método

numérico implica aproximar el ángulo de Salida cuando se tiene un determinado ángulo de Entrada. Se retoman las longitudes de cada una de las 4 barras: 10, 8, 6 y 4 centímetros respectivamente. Mediante el software de diseño Sketchup en línea, se ha representado la situación del mecanismo de las 4 barras. El modelo en 2 dimensiones representa una geometría del mecanismo de 4 barras que define sus longitudes y ángulos, el resultado puede observarse en la Figura 1.

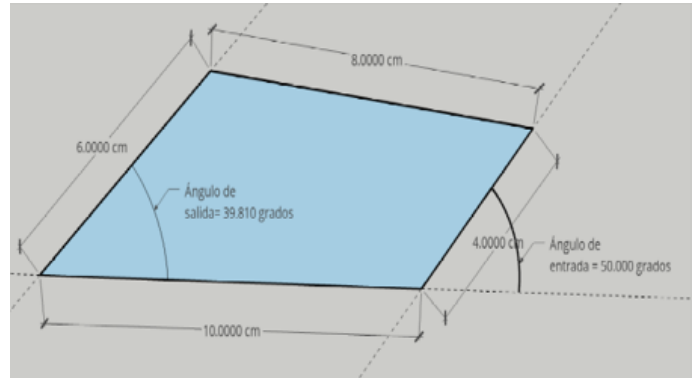


Figura 1. Representación en 2 dimensiones del mecanismo de las 4 barras.

La función de transportador integrada en el software *Sketchup* en línea, permite realizar la medición de ángulos directamente sobre la geometría; en este caso se aprecia que al tener un ángulo de entrada de 50.000°, se obtuvo una medición gráfica para el ángulo de salida de 39.810°. Se observa que a través del software de diseño en línea, es posible obtener un valor cercano a la solución analítica, lo cual le permite a los estudiantes tener una herramienta gráfica de verificación de resultados; considerando que la solución exacta del ángulo de salida es 39.81040° [11].

La ecuación simplificada que relaciona el ángulo de entrada y el ángulo de salida, tiene la siguiente forma [11]:

$$\frac{5}{3} \cos \alpha - \frac{5}{2} \cos \beta + \frac{11}{6} - \cos(\alpha - \beta) = 0 \quad (1)$$

Donde  $\alpha$  representa el ángulo de entrada y  $\beta$  representa el ángulo de salida. Se han implementado los métodos de bisección y secante en una tarjeta basada en Arduino Nano. Adicionalmente, como un medio de verificación y rastreo de resultados, se recomienda implementar ambos métodos en una hoja de cálculo. Los resultados obtenidos, al implementar el método de la bisección en la tarjeta basada en Arduino Nano, se observan en la Tabla .

Tabla 1. Implementación del algoritmo de Bisección en una tarjeta basada en Arduino Nano.

Iter	Raíz aprox.	Error Relativo porcentual
1	35.000000	
2	37.500000	6.666667 %
3	38.750000	3.225806 %
4	39.375000	1.587302 %
18	39.810447	0.000096 %
19	39.810428	0.000096 %

Para la implementación en lenguaje Arduino del método de la bisección, se consideró  $30^\circ$  y  $40^\circ$  como los límites inferior y superior del intervalo de búsqueda donde se encuentra la raíz. Tanto para el caso de la implementación del algoritmo de la bisección como de la secante, la definición de la función en lenguaje Arduino se hizo de la siguiente manera:

```
float f(float x)
{
return (1.666666)*cos(radians(50))-2.5*cos(radians(x))
+1.833333-cos(radians(50-x));
}
```

Se utilizaron números decimales, a fin de reducir el esfuerzo computacional de la tarjeta con microcontrolador; con esto, se evitó realizar las divisiones presentes de la ecuación simplificada del mecanismo de las 4 barras.

Tabla 2. Implementación del algoritmo de Secante en una tarjeta basada en Arduino Nano

Iter	Raíz aprox.	Error Relativo porcentual
1	39.769248	
2	39.810283	0.103076 %
3	39.810428	0.000364 %

La descripción del algoritmo de bisección y la secante, pueden consultarse en obra publicada [12]. Es posible observar que el método de bisección tiene la desventaja de una convergencia lenta, aunque se aproxima paulatinamente a la solución exacta. Para el método de la secante, el cual se prefiere a ser utilizado cuando es difícil obtener la derivada de la función con el método de Newton, los resultados se pueden consultar en la Tabla . Los dos puntos de aproximación para comenzar el método de la secante fueron  $30^\circ$  y  $40^\circ$ ; para este método no es necesario que dichos puntos encierren la raíz, como lo es en el caso del método de bisección.

Se observa que la convergencia del método de la secante para este caso es más rápida, además que no fue necesario obtener la derivada de la ecuación ni evaluarla durante el proceso de cálculo como lo requiere el método de Newton.

Se ha presentado la propuesta de un proyecto que revisita un problema clásico como el mecanismo de las 4 barras con un enfoque tecnológico, que le permite a los alumnos implementar algoritmos de métodos numéricos a través de hardware accesible. Esta propuesta tiene además la finalidad de que los alumnos aprendan paralelamente un lenguaje de programación simplificado e intuitivo basado en C, como lo es Arduino. Se fomenta el uso de una herramienta de diseño en 2 dimensiones, así como el uso de una hoja de cálculo,

para dotar a los alumnos con medios de verificación visual, que faciliten la depuración del algoritmo de programación, implementado en una tarjeta con microcontrolador. El trabajo presentado, favorece la vinculación entre el estudio teórico de los métodos numéricos para resolver problemas reales desde una perspectiva tecnológica. Se fomenta el uso de dispositivos electrónicos con la finalidad de volver más interesante y atractivo su análisis. En el tenor de este breve artículo, queda aún como un problema abierto, el desarrollo de una interfaz gráfica para el procesamiento de los datos obtenidos a través de la tarjeta con microcontrolador. Por otra parte, el desarrollo de un prototipo tangible y funcional que permita presentar a los alumnos el problema a resolver utilizando software y hardware accesible. En una etapa conceptual, se ha construido un modelo con láminas de madera comprimida, el cual consta de 4 barras unidas a través de tuercas y tornillos de metal, con la finalidad de otorgar movilidad al mecanismo. Para modificar el ángulo de entrada del mecanismo se ha acoplado un servomotor. Sin embargo, aspectos técnicos como la precisión y exactitud para medir y controlar los ángulos del mecanismo, aún son problemas abiertos por resolver y que se esperan presentar en una siguiente comunicación.

## REFERENCIAS

- [1] S. Fernández, J. A. Orosa, J. J. Galán, *JMR* **9**, 2 (2012).
- [2] H. Morarji, R. E. M. Cooper, R. L. Broughton, *Int. J. Math. Ed. Sci. Technol.* **11**, 33 (1980).
- [3] H. Djamila, *J. Phys.: Conf. Ser.* **890**, 012093 (2017).
- [4] J. Mendonça, G. Gonçalves, T. Ferro, M. Ferreira, «Teaching and learning of contents from numerical methods using the technology: Comparison of the use of two technological resources», en 2016 International Symposium on Computers in Education (SIIE), (2016).
- [5] D. Herceg, D. Herceg, *Inform. Educ.*, **19**, 239 (2020).
- [6] F. Freudenstein, *Reson.* **15**, 740 (2010).
- [7] A. A. Galadima, «Arduino as a learning tool», 11th International Conference on Electronics, Computer and Computation (ICECCO), (2014).
- [8] W. S. M. Sanjaya, D. Anggraeni, A. Sambas, R. Denya, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1090**, 012015 (2018).
- [9] V. L. Díaz-Melián et al., *Rev. Cubana Fis.* **36**, 4 (2019)
- [10] C. Calvo-Mola, S. López-Pérez, E. Garcia-Alfonso, J. Cerutti-Torres, *Rev. Cubana Fis.* **36**, 125 (2019)
- [11] J. D. Hoffman, S. Frankel, S. Frankel, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. CRC Press, 2018.
- [12] S. C. Chapra, R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, 6th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2010.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) license.

