

AMPLIACIÓN DE LAS POSIBILIDADES DEL SISTEMA HPCI-1 PARA EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE UN PÉNDULO SIMPLE REAL EN OSCILACIONES PEQUEÑAS

EXPANDING THE POSSIBILITIES OF THE HPCI-1 SYSTEM FOR THE STUDY OF A REAL SIMPLE PENDULUM IN SMALL OSCILLATIONS

A. HERNÁNDEZ-FEREIRA[†]

Departamento de Física Facultad de Ingeniería, Universidad de Cienfuegos, Cuba; archdez@ucf.edu.cu[†]

[†] autor para la correspondencia

Recibido 1/2/2021; Aceptado 15/11/2021

Empleando las posibilidades del experimento “Isocronismo del péndulo simple” del laboratorio de Física asistido por computadora HPCI-1 se obtuvieron los registros de las variaciones del voltaje eléctrico con el tiempo correspondientes a las posiciones angulares de los cuerpos integrantes de tres péndulos simples reales de diferentes masas que ejecutaban oscilaciones pequeñas. Usando la herramienta Analyze del HPCI-1 se obtuvieron los valores de las amplitudes en los diferentes instantes de tiempo que luego se procesaron empleando EXCEL. Así, se realizó un estudio de las oscilaciones amortiguadas de este sistema. Con la variante empleada, el trabajo de laboratorio va más allá del estudio tradicional restringido a las oscilaciones armónicas sin presencia de fuerzas de fricción, situación que no se corresponde con la del péndulo real. En particular se obtuvieron los coeficientes de amortiguamiento de las esferas para el aire y se evidenció la influencia de la masa de los cuerpos en el mismo, también se mostró su influencia en la amplitud y frecuencia de oscilación.

Using the possibilities of experiment “Isochronism of Simple Pendulum” of the Computer Aided Physics Laboratory HPCI-1, the records of the variations of the electric voltage with time corresponding to the angular positions of the integrating bodies of three simple pendula in small oscillations with different masses were obtained. Applying the Analyze tool of the HPCI-1 the values of the amplitudes in the different instants of time were obtained and later processed using EXCEL. In this way, a general study of the damped oscillations of this system was carried out. Thanks to the proposal, the laboratory work goes beyond the traditional study restricted to harmonic oscillations without the presence of friction forces, which does not match real pendula. In particular, the damping coefficients of the spheres due to the air were obtained and the influence of the mass of the bodies on them was evidenced, their influence in amplitude and frequency of oscillations was also shown.

PACS: Teaching methods and strategies (métodos y estrategias de enseñanza), 01.40.gb; laboratory computer use (uso de computadores en el laboratorio), 01.50.Lc; data acquisition: hardware and software (adquisición de datos), 07.05.Fb; laboratory experiments and apparatus (aparatos y experimentos de laboratorio), 01.50.Pa

I. INTRODUCCIÓN

En la inmensa mayoría de los cursos de Física General de la Educación Media y de la Educación Superior, exceptuando los de las carreras de Física, se aborda el estudio del péndulo simple en el caso estrictamente armónico, en que no se consideran los efectos de la fuerza de fricción del cuerpo con el medio en el cual se mueve y se reducen sus oscilaciones a ángulos pequeños (aquellos para los cuales $\sin \theta \sim \theta$). Al estudio del caso cuando las oscilaciones no son pequeñas y no se considera la fricción se han dedicado infinidad de trabajos que aparecen reportados en la literatura [1–7]. Sin embargo, son más escasos los que considerando las oscilaciones pequeñas toman en cuenta los efectos de la fricción [8]. Para otros sistemas, como el cuerpo resorte, hay algunos reportes.

Entre los experimentos previstos en el Sistema de Prácticas de Laboratorio de Física Asistido por Computadora (SPLAC) HPCI-1 de la firma Star Sensor Ltd en la sección 2 Oscilaciones y Ondas aparece el experimento 1 titulado “Isocronismo del péndulo simple” (ver figura 1).

El mismo está dedicado a ilustrar que un péndulo real mantiene constante tanto la amplitud de sus oscilaciones como el período las mismas para una longitud dada. Para ello usa el registro eléctrico de las oscilaciones de un péndulo con una esfera pesada en un intervalo de tiempo muy pequeño que tiene el aspecto mostrado en la figura 2.

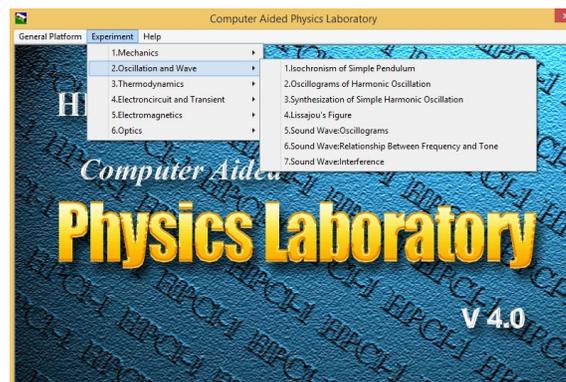


Figura 1. Aspecto de la pantalla del menú principal del software del SPLAC HPCI-1 mostrando los experimentos del capítulo 2 donde aparece el 1 que fue usado en el presente trabajo.

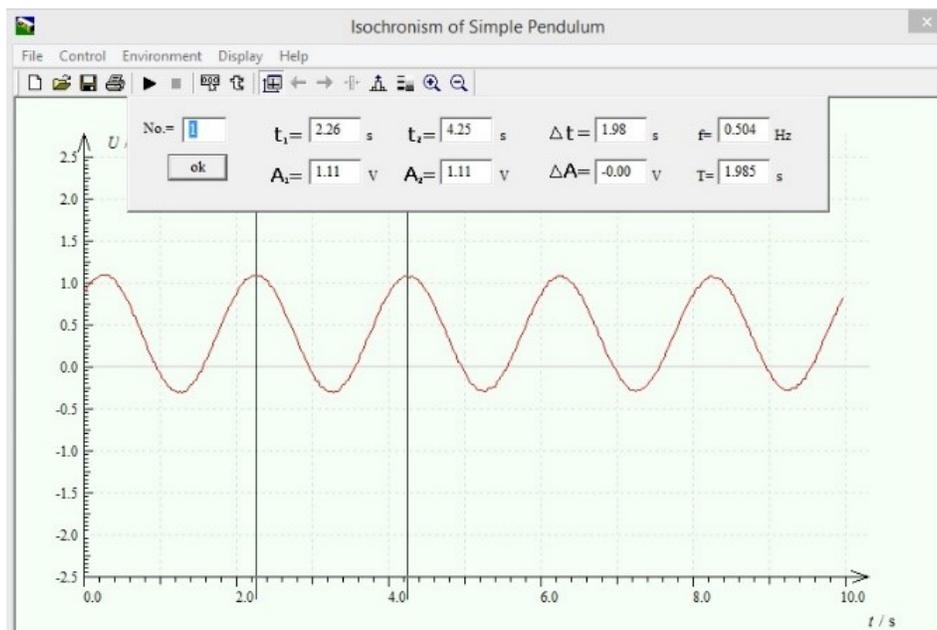


Figura 2. Aspecto de la pantalla del experimento usado que muestra las amplitudes de las oscilaciones en dos instantes de tiempo separados por un período para el péndulo con esfera de acero en un intervalo de 10 s.

En dicha figura aparece la herramienta Analyze del sistema HPCI-1 que sirve para medir la amplitud de las oscilaciones en dos instantes de tiempo y brinda sus diferencias. Como podemos apreciar no hay variación ΔA de la amplitud en un período en estas condiciones muy particulares.

Como sabemos, estas cuestiones no son estrictamente ciertas bajo cualesquiera circunstancias y viene a reiterar un resultado que se plantea en la Enseñanza Media y que puede ser objeto de un análisis más profundo a la luz de los conocimientos de Matemática Superior que adquieren los estudiantes universitarios de las carreras de Ciencia e Ingeniería. Este es un ejemplo típico del uso limitado de una tecnología como lo son los SPLAC para comunicar un resultado que no es estrictamente cierto y sin embargo no se emplean sus potencialidades para profundizar y revelar los verdaderos detalles del fenómeno o sistema físico estudiado.

El propósito del presente trabajo es mostrar que con el software de un experimento del HPCI-1, de alcance muy limitado, se pueden evidenciar los efectos de la fuerza de fricción en un péndulo simple real que ejecuta oscilaciones pequeñas y que por tanto no puede considerarse armónico ya que es amortiguado. Para ello hacemos uso del registro eléctrico de las oscilaciones del mismo y procesamos la información de dichos registros para mostrar las características del movimiento amortiguado y extraer parámetros importantes que lo describen.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

Se empleó el montaje con los accesorios del trabajo de laboratorio 1 de la sección de Oscilaciones y Ondas titulado "Isocronismo del péndulo simple" que aparece entre los trabajos del sistema de prácticas de laboratorio de Física asistido por computadora HPCI-1 de la firma Star Sensor Ltd [9,10]. En la figura 3 aparece un esquema del mismo y

del soporte donde se colocaba el péndulo.

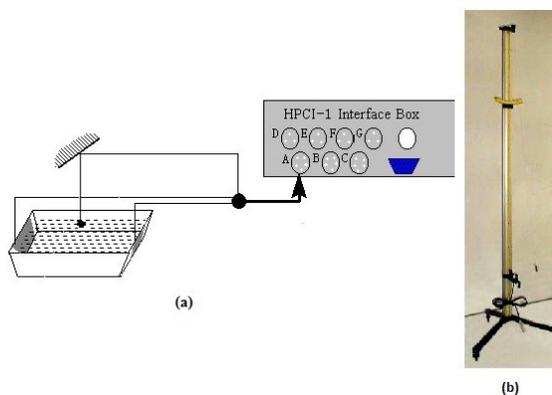


Figura 3. (a) Esquema del montaje (b) Soporte para colocar los péndulos.

En este experimento se emplea el sensor de voltaje A con tres terminales, dos de los cuales sensaban la diferencia de potencial entre los electrodos. Un tercer terminal sensaba la diferencia de potencial respecto al valor correspondiente al centro de la cubeta de una aguja metálica colocada en el extremo de la esfera que, en contacto con el agua, oscilaba entre los electrodos. La fuerza de fricción debida al movimiento del extremo de la aguja de muy poca sección y profundidad en el agua (apenas 1 mm² de sección transversal de interacción) es considerablemente menor que la que se origina por el movimiento de la esfera en el aire con una sección transversal de 283.58 mm². Es por ello que se puede atribuir la atenuación de la amplitud de las oscilaciones fundamentalmente a la fuerza de fricción viscosa entre la esfera y el aire. La observación de la figura 2 para una esfera de acero moviéndose en el aire y la aguja en el agua demuestra lo aceptable de la anterior suposición.

Los resultados de un trabajo previo [11] ya mostraban

evidencia experimental de la influencia de la masa de la lenteja del péndulo en su comportamiento durante el movimiento amortiguado que ejecutaba. Ahora esto se quería evidenciar mostrando, mediante un dispositivo de registro eléctrico, el cambio de sus amplitudes en el tiempo. Para ello se emplearon tres esferas de igual diámetro (19 mm) pero de diferentes materiales y masas. La figura 4 muestra los detalles de las agujas insertadas en las esferas y la 5 la cubeta con la ranura y los electrodos.



Figura 4. Foto mostrando los detalles de las esferas con agujas.



Figura 5. Foto mostrando la cubeta empleada.

Variando la distancia desde donde se colgaba el péndulo se obtenían diferentes valores de su longitud. En calidad de hilo se usaba un alambre fino de cobre ensartado en el ojo de la aguja. El soporte tenía la posibilidad de nivelación con tres tornillos en sus patas para garantizar el movimiento de oscilación del cuerpo en un plano.

La esfera oscilaba siempre a la misma altura a lo largo de una ranura de la cubeta cilíndrica especialmente diseñada con dos electrodos circulares de cobre y que contenía agua. Los detalles se muestran en la figura 6(a) y en la 6(b) se muestra la instalación en su conjunto.

Al aplicar una diferencia de potencial a los dos electrodos (con ayuda de una fuente de CD) en el volumen de agua entre ambos se establece un campo eléctrico de magnitud E relativamente uniforme y la diferencia de potencial entre el

punto donde se localiza la aguja y el centro de la cubeta varía de forma lineal con la posición lineal o angular al mismo en la forma:

$$V[x(t)] - V(0) = E \cdot x(t) = El\theta(t). \quad (1)$$

Aquí l es la longitud del péndulo. Este resultado se puede obtener de la relación entre el potencial y el campo eléctrico y aparece en cualquier libro de texto de los cursos de Física [12,13].

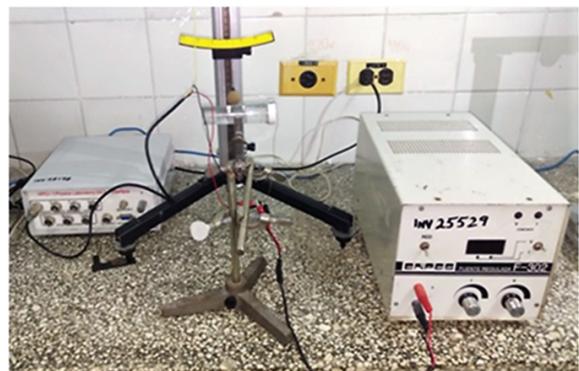
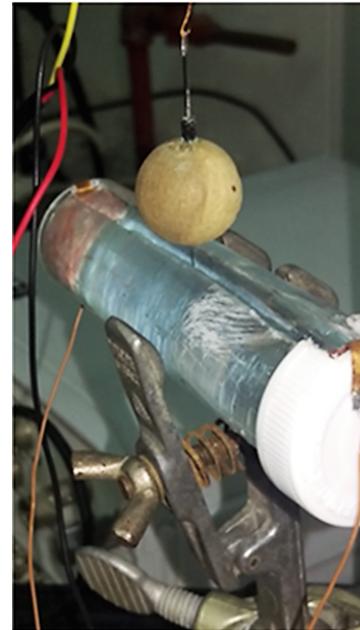


Figura 6. (a) Foto mostrando los detalles de la esfera con aguja oscilando a través de la ranura de la cubeta. (b) Foto mostrando el montaje en su conjunto.

Así, la anteriormente mencionada diferencia de potencial está directamente relacionada con la elongación de las oscilaciones. Ejecutando el software asociado con este trabajo se pudieron obtener los registros de dichas diferencias de potencial correspondientes a las elongaciones angulares de los tres péndulos. Los registros se hicieron para diferentes intervalos de tiempo de las oscilaciones, para 10 s, para 25 s y para 90 s. En las figuras 6, 7 y 8 se muestra el aspecto de estos registros para diferentes intervalos de tiempo.

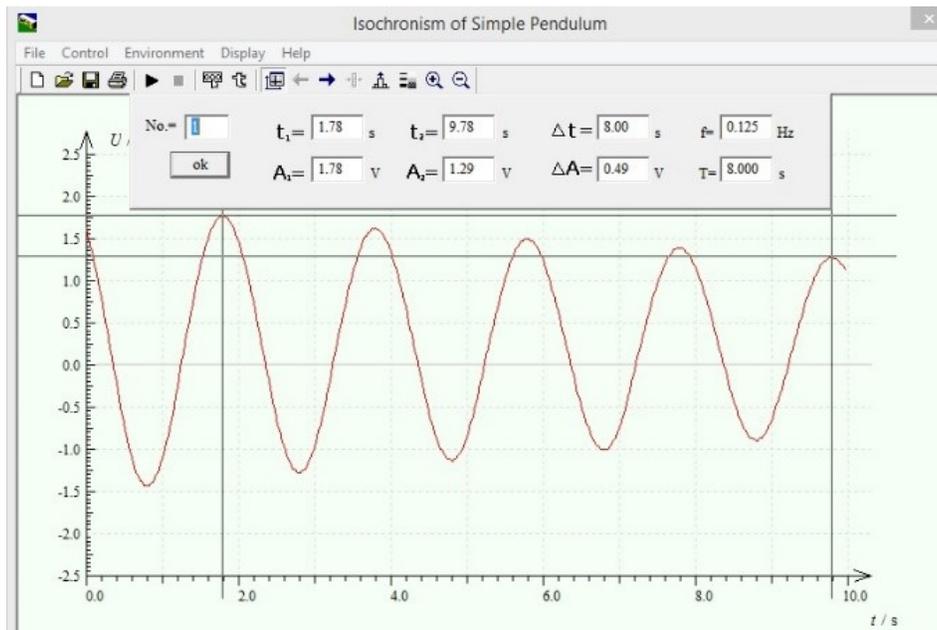


Figura 7. Gráfica del registro del voltaje en función del tiempo para el péndulo con esfera de madera en un intervalo de 10 s mostrando los valores de la herramienta Analyze para dos instantes de tiempo separados por 4 períodos.

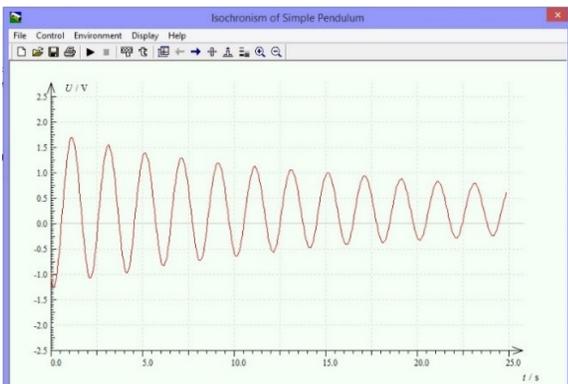


Figura 8. Gráfica de registro del voltaje en función del tiempo para el péndulo con esfera de madera en un intervalo de 25 s.

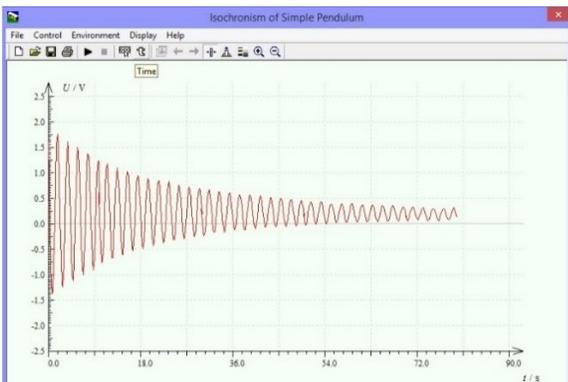


Figura 9. Gráfica del registro del voltaje en función del tiempo para el péndulo con esfera de madera en un intervalo de 90 s.

Una vez obtenidos los registros se hizo uso de la herramienta Analyze del HPCI-1 con la cual se pueden obtener, de las gráficas del voltaje en función del tiempo, los valores del mismo para dos instantes de tiempo diferentes. Estos valores se corresponden con los de la elongación angular. En este caso

se midieron los valores del voltaje en los puntos de máxima elongación, de esta manera la diferencia entre dos instantes de tiempo correspondientes a dos máximos consecutivos era igual al período de oscilación de dicho péndulo.

En las figuras 6 y 9 se muestra el aspecto de la pantalla correspondiente a la medición del voltaje con el Analyze en dos instantes de tiempo separados por 4 períodos para los péndulos con esfera de madera y de aluminio respectivamente. Los pares de valores (amplitud, tiempo) para los tres péndulos se registraron y se construyeron las tablas similares a la tabla 1 para luego procesarlos empleando EXCEL de Microsoft.

Se construyeron las gráficas del voltaje $V(t)$ contra el tiempo t y del logaritmo del voltaje $\ln V(t)$ contra el tiempo t . La primera se ajustó de acuerdo a una ley exponencial y la segunda de acuerdo a una dependencia lineal. En ambos casos EXCEL brinda las ecuaciones de ajuste y el valor del parámetro R^2 que caracteriza el grado de correspondencia con las funciones de ajuste. Para la gráfica $\ln V(t)$ contra el tiempo se obtuvieron las ecuaciones de las rectas de ajuste y de ellas los valores de la pendiente m , el intercepto b y el parámetro R^2 que nos indicaba el grado de linealidad.

A su vez, se calcularon las incertidumbres Δm en la pendiente y Δb en el intercepto de los parámetros de la recta de ajuste de acuerdo con las expresiones:

$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}} \quad (2)$$

$$\Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}} \quad (3)$$

Donde S_y viene dada por:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - b)^2}{N - 2}}. \quad (4)$$

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La observación de las gráficas como las mostradas anteriormente evidenciaron que el movimiento de los péndulos en todos los casos era infra (o sub) amortiguado.

Admitiendo que la fuerza de fricción entre la esfera y el aire circundante donde se mueve es del tipo viscosa que puede ser descrita en la forma $f = -bv$ la ecuación diferencial que describe el movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \theta = 0, \quad (5)$$

cuya solución viene dada por:

$$\theta(t) = \theta_{max} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

donde la frecuencia angular ω de las oscilaciones es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (7)$$

La ecuación 6 indica que la amplitud de las oscilaciones decae exponencialmente con el tiempo y que el parámetro $\gamma = b/2m$ determina la rapidez de la atenuación que tiene lugar. Así mismo, la ecuación 7 indica que $\gamma^2 = b^2/4m^2$ determina el corrimiento de la frecuencia angular respecto al valor de la misma para el caso estrictamente armónico (sin fricción). Es por ello que la obtención de este parámetro γ denominado coeficiente de amortiguamiento es importante y en su determinación se enfocó el trabajo.

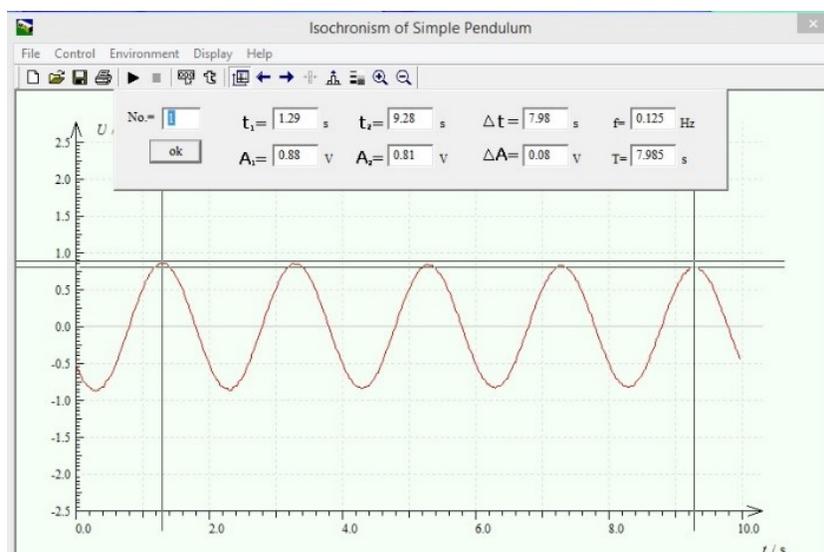


Figura 10. Gráfica del registro del voltaje en función del tiempo para el péndulo de aluminio en un intervalo de 10 s mostrando los valores de la herramienta Analyze para dos instantes de tiempo separados por 4 períodos.

Tabla 1. Valores del potencial, su logaritmo y el período para distintos instantes de tiempo del péndulo con esfera de madera

$t[s]$	$V(t) [V]$	$\ln V(t)$	$T [s]$
1.15	1.71	0.53649337	-
3.15	1.54	0.43178242	2
5.15	1.38	0.3220835	2
7.12	1.29	0.25464222	1.97
9.12	1.19	0.17395331	2
11.15	1.15	0.13976194	2.03
13.12	1.04	0.03922071	1.97
15.12	1.01	0.00995033	2
17.12	0.93	-0.07257069	2
19.12	0.88	-0.12783337	2
21.12	0.83	-0.18632958	2
23.12	0.79	-0.23572233	2
		T_{avg}	1.99727273

En la tabla 1 se presentan los valores de los voltajes para diferentes instantes de tiempo para el péndulo con esfera de madera.

Como esta se confeccionaron también para los otros dos péndulos. El período de las oscilaciones en cada caso se obtuvo como el promedio de las diferencias de tiempo entre los instantes correspondientes a los valores máximos del voltaje. En las figuras 11, 12, 13 se muestran las gráficas de $V(t)$ y $\ln V(t)$ contra t para cada uno de los tres péndulos con esferas de masas diferentes. En las mismas aparecen las ecuaciones de ajuste y en ellas el coeficiente de amortiguamiento γ .

En la tabla 2 se muestran de forma resumida los resultados de los ajustes lineales. Allí aparecen el coeficiente R2 que describe el grado de linealidad, los parámetros de las ecuaciones de ajuste (pendiente m que corresponde con $-\gamma$ e intercepto b), así como las incertidumbres de dichos parámetros.

Como se puede observar los valores del coeficiente de amortiguamiento aumentan con la disminución de la masa de la esfera. De la ecuación 7 es posible encontrar la razón entre la frecuencia angular de oscilación en el caso amortiguado respecto a la frecuencia angular del caso armónico, que viene

dada por:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} \quad (8)$$

En la tabla 3 se brinda un resumen de los valores de los coeficientes de amortiguamiento γ , de sus cuadrados, de

la razón entre la frecuencia angular de oscilación en el caso amortiguado respecto a la frecuencia angular del caso armónico y del valor del término $e^{-\Delta t}$ para 90 s. Del análisis de esta tabla se puede llegar a la conclusión que en este caso la fricción de la esfera con el aire no trae consigo un cambio significativo en la frecuencia de oscilación del péndulo respecto a la frecuencia de oscilación del caso armónico.

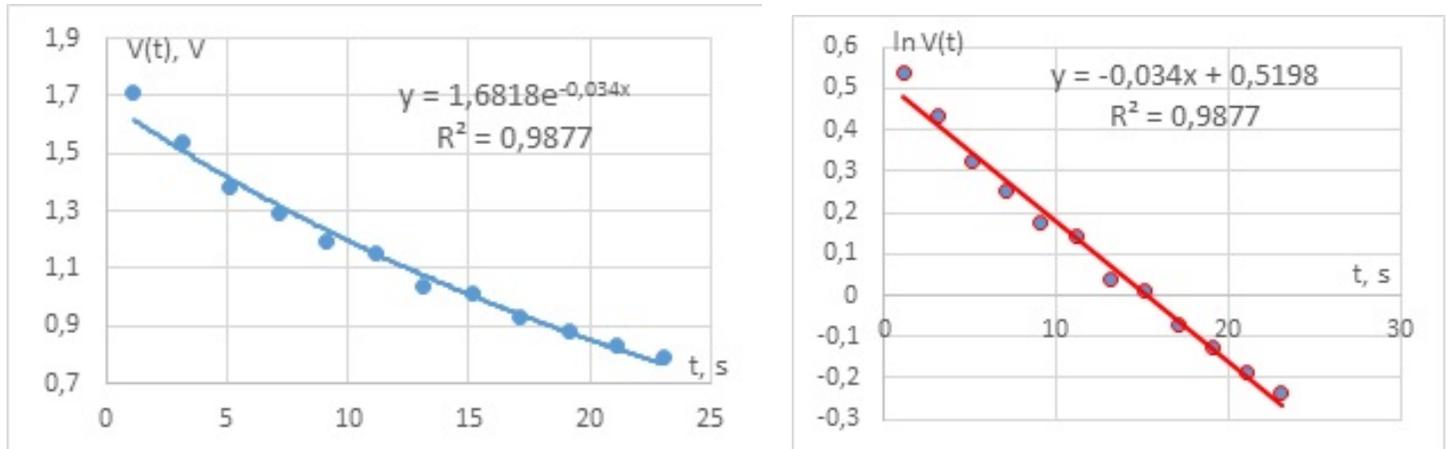


Figura 11. Gráficas de $V(t)$ y $\ln V(t)$ contra t ajustadas mostrando las ecuaciones de ajuste donde aparece el coeficiente de amortiguamiento γ y el parámetro R^2 para el péndulo con esfera de madera.

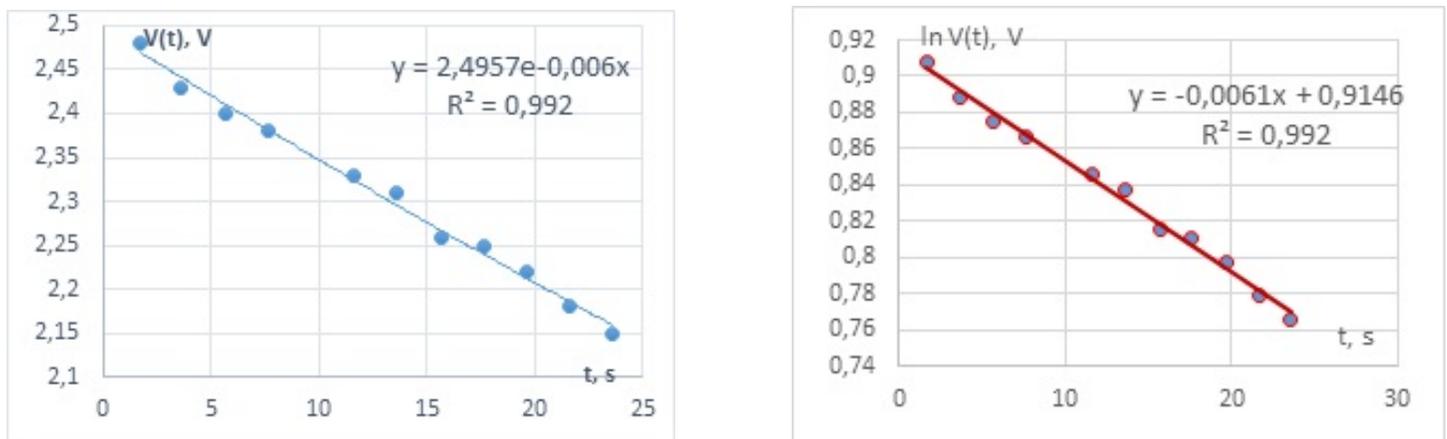


Figura 12. Gráficas de $V(t)$ y $\ln V(t)$ contra t ajustadas mostrando las ecuaciones de ajuste donde aparece el coeficiente de amortiguamiento γ y el parámetro R^2 para el péndulo con esfera de acero.

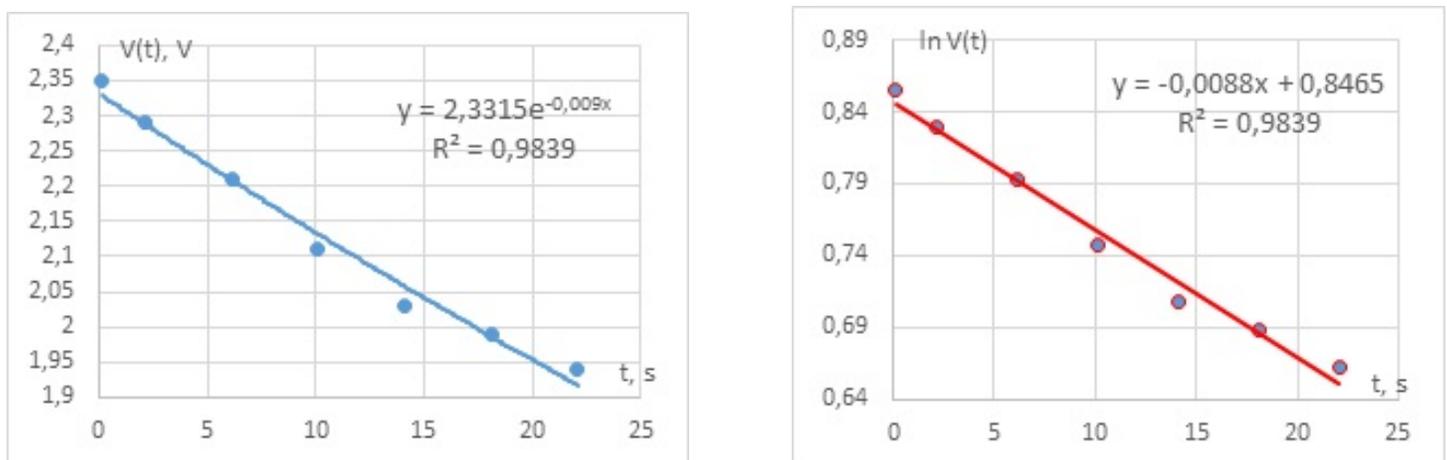


Figura 13. Gráficas de $V(t)$ y $\ln V(t)$ contra t ajustadas mostrando las ecuaciones de ajuste donde aparece el coeficiente de amortiguamiento γ y el parámetro R^2 para el péndulo con esfera de aluminio.

Tabla 2. Coeficientes R^2 , valores de las pendientes m e interceptos b de las ecuaciones de ajuste lineal y de sus incertidumbres para los péndulos estudiados.

Material de la esfera	Masa [g]	$\gamma = b/2m$ [s^{-1}] (-valor de la pendiente m)	b (intercepto de la recta con el eje y)	Coefficiente R^2	Δm	Δb
Acero	26.9	0.061	0.9146	0.992	0.0039	0.1701
Aluminio	9.8	0.0088	0.8465	0.9839	0.0072	0.3521
Madera	2.4	0.0340	0.5198	0.9877	0.0050	0.1748

Tabla 3. Valores de γ , γ^2 , ω/ω_0 y $e^{-\gamma t}$ para 90 s para los tres péndulos.

Masa [g]	γ [s^{-1}]	γ^2 [s^{-2}]	ω/ω_0	$e^{-\gamma t}$ para 90 s
26.9	0.061	0.00003721	0.999998098	0.577527049
9.8	0.0088	0.00007744	0.999996041	0.452938013
2.4	0.0340	0.001156	0.999940898	0.046887695

Tal vez de aquí que el título del experimento propuesto por el HPCI-1 sea isocronismo del péndulo simple y que en sus objetivos plantee que el movimiento es armónico simple si las oscilaciones son pequeñas. Sin embargo, la atenuación presente en la amplitud sí exhibe diferencias significativas pues en unos 45 períodos (90 s) ha disminuido casi al 58 % de su amplitud inicial en el péndulo con esfera de acero mientras que, para el péndulo con esfera de madera la disminución es casi al 4,7 % de su amplitud inicial.

El trabajo original del HPCI-1 sólo está planteado para realizar con la esfera de acero que es aquella en que los efectos son menores y para un breve intervalo de tiempo. Algunos registros obtenidos para este caso no detectaban cambio en la amplitud, como se muestra en la figura 2.

Como ya hemos afirmado se usa esta tecnología para arribar a las mismas conclusiones que se pueden llegar con otras variantes, se repite el nivel a que se analizan los fenómenos en la Enseñanza Media y en algunas ocasiones, como en el experimento que se analiza, para enfatizar o reforzar una situación que no se corresponde con la realidad. Es hora de que esta tecnología se emplee en revelar los aspectos relevantes de los fenómenos cuando estos se pueden estudiar con nuevas herramientas matemáticas en la Educación Superior (cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, etc.) y entonces, se justifica usar las potencialidades de estos sistemas para revelar estos nuevos elementos y de esta manera avanzar en el nivel de asimilación y comprensión de los fenómenos respecto al nivel educacional anterior.

Evidentemente el registro eléctrico de las oscilaciones del péndulo permite estudiar éste en un caso más general que el armónico, que ya ha sido objeto de estudio en los niveles de enseñanza anteriores. Con este existe la oportunidad de mostrarle a los estudiantes que los péndulos reales al oscilar con oscilaciones pequeñas, pero en presencia de la fuerza de fricción viscosa entre la lenteja y el aire, ejecutan un movimiento amortiguado.

También se les puede enseñar cómo tratar el movimiento amortiguado, hallando experimentalmente el coeficiente de amortiguamiento, que es el parámetro que determina cómo se atenúa la amplitud de las oscilaciones y cuánto cambia la frecuencia respecto al caso armónico. Las nuevas ecuaciones a emplear para la descripción de este caso, que no son tan complejas, contienen precisamente este parámetro.

IV. CONCLUSIONES

- El registro eléctrico de las oscilaciones mecánicas, que se puede obtener con el sistema HPCI-1, permite realizar el estudio del movimiento del péndulo simple ejecutando oscilaciones pequeñas cuando existe presencia de fuerza de fricción del cuerpo con el aire cuando el movimiento ya no es armónico simple, sino infra amortiguado y rebasa con creces al original de dicho sistema.
- El estudio planteado se corresponde con el nivel de profundidad con que debe abordarse este tema en los cursos de Física en la Educación Superior, supera al nivel de la Enseñanza Media y potencia el uso de los SPLAC para estos fines.
- Respecto al movimiento armónico simple, la característica del movimiento amortiguado que más difiere es la amplitud de las oscilaciones y no su frecuencia angular.
- Esta práctica de laboratorio prepara al estudiante para el estudio experimental de otros tipos de oscilaciones que abordará en los cursos de Física posteriores como las electromagnéticas presentes en un circuito RLC.

REFERENCIAS

- [1] D. Amrani, P. Paradis, M. Beaudin, Rev. Mexicana Fis. E **54**, 59, (2008).
- [2] P. Amore, et al. Rev. Mexicana Fis. E **53**, 106 (2007).
- [3] R.B. Kidd, S.L. Fogg, Phys. Teacher, **40** (2002).
- [4] E. Salinas-Hernández, et al. Revista Mexicana de Física E **63**, 6 (2017).
- [5] R.R. Parwani, Eur. J. Phys. **25**, (2004).
- [6] L.E. Millet, Phys. Teacher **41**, (2003).
- [7] G. Torzo, P. Peranzoni, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 2 (2009).
- [8] M. Chávez, SCIÉENDO **20**, 1 (2017).
- [9] HPCI-1 Computer Aided Physics Laboratory. Experiment Manual. Version 4.0. U-Star Sensor Technology Co., Ltd.
- [10] HPCI-1 Computer Aided Physics Laboratory. Application Manual. Version 4.0. U-Star Sensor Technology Co., Ltd.

- [11] A. Hernández, G. Pérez, La evolución de los instrumentos de medición de las magnitudes físicas y su influencia en la modalidad y resultados de las prácticas de laboratorio de Física. Caso del péndulo simple. Memorias del VI Taller de Enseñanza de la Física, (Ediciones Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 2019).
- [12] R. A. Serway, J. W. Jewett, Physics for Scientists and Engineers, 6th Ed. (Thomson Brooks/Cole, 2004).
- [13] H.D. Young, R.A. Freedman, Física Universitaria con Física Moderna Vol. 2, 13va Ed. (Pearson, México, 2013).

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0, <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) license.

