

## Uso de las funciones de ajuste en el laboratorio teniendo en cuenta la correlación entre sus parámetros

T. Molina y O. Calzadilla

Facultad de Física, Universidad de La Habana, Cuba; [tmolina@fisica.uh.cu](mailto:tmolina@fisica.uh.cu)<sup>†</sup>, [calza@fisica.uh.cu](mailto:calza@fisica.uh.cu).  
<sup>†</sup>autor para la correspondencia

Recibido el 1/02/09. Aprobado en versión final el 13/06/2010.

**Sumario.** El objetivo fundamental cuando se realiza el ajuste de los datos obtenidos mediante medición es encontrar una función matemática que permita obtener valores de la variable dependiente que no están contenidos en los datos experimentales, es decir poder realizar interpolaciones y extrapolaciones. El valor de la variable dependiente encontrado mediante la función de ajuste deberá ser reportado conjuntamente con su incertidumbre. Los programas de cálculo comercial para ajustar curvas, reportan de forma directa la incertidumbre en cada uno de los parámetros del ajuste, pero no reportan la covarianza entre ellos, por lo que realizan una sobre estimación de la incertidumbre asociada a la magnitud determinada. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en el laboratorio docente en la que se manifiesta las diferencias entre las incertidumbres encontradas de la magnitud determinada cuando se calcula ésta teniendo en cuenta solamente las incertidumbres de cada uno de los parámetros de la curva de ajuste utilizada y cuando además se aplica el método matricial para el cálculo de las covarianzas entre los parámetros de la curva de ajuste.

**Abstract.** An adjustment is carried out to obtain the adjustment parameters that define a mathematical function that is used to obtain interpolated and extrapolated values. The calculated value obtained by means of the adjustment function will be reported as the uncertainty of this value. The commercial calculus programs can be used to adjust curves they reporting directly the value of parameters and their uncertainties, but they don't report the covariance among their parameters, for this reason the estimation of the uncertainties associated to these calculated magnitudes are not successful. In this work are presented the results obtained in the educational laboratory when calculating the uncertainties using the matrix method and keeping in mind the covariances among the adjustment parameters..

**Palabras clave.** Physics education, 01.40.-d, teacher training, 01.40.J-.

### 1 Introducción

En el laboratorio docente de Óptica se utiliza un monocromador de prisma (tipo YM-2) de fabricación soviética para la realización de las prácticas que están relacionadas con la transmisión y absorción de la luz:

- Determinación de la longitud de onda transmitida y el ancho de banda de un filtro óptico y de uno interferencial.
- Estudio de la absorción de la luz.

En ambas prácticas se mide la transmisión luminosa en

la región espectral que permite el monocromador (380 – 1000) nm.

En la primera, se mide la transmisión luminosa de un filtro óptico y de uno interferencial, con el objetivo de determinar la longitud de onda  $\lambda$  que corresponde a la máxima intensidad transmitida, así como, los anchos de bandas  $\Delta\lambda$  de los filtros. Posteriormente se comparan las cualidades de ambos filtros.

En la segunda se mide la transmisión luminosa de una solución acuosa de Sulfato de Cobre ( $\text{SO}_4\text{Cu}$ ) a una concentración conocida y la del agua pura ( $\text{H}_2\text{O}$ ) contenida

ambas en cubetas de igual espesor, con el objetivo de determinar la zona espectral de máxima absorción del Sulfato de Cobre. Se obtienen las curvas de la transmitancia del filtro interferencial ( $I_{fi}$  vs UT) y del filtro óptico ( $I_{fo}$  vs UT) y la de absorción del Sulfato de Cobre ( $I_o / I_{SCu}$  vs UT), siendo  $I_{fi}$  e  $I_{fo}$  las intensidades de la luz transmitida por los filtros,  $I_o$  e  $I_{SCu}$  las transmitidas por las cubetas con las sustancias líquidas y UT las unidades de la escala del monocromador, las que están referidas a las posiciones angulares del prisma con respecto al haz luminoso incidente en el mismo, después de haber atravesado los filtros o las cubetas. La función del prisma es dispersar la luz incidente en sus longitudes de onda (fig 1), por lo que a la salida del monocromador se tendrá haces luminosos cuasi-monocromáticos cuyas longitudes de onda dependerá de la posición angular del prisma. Para poder conocer las longitudes de onda transmitida por los filtros o las absorbidas por el Sulfato de Cobre es necesario calibrar la escala del monocromador, para lo cual se mide las posiciones (UT) correspondientes a las líneas espectrales emitidas por una lámpara espectral o un láser, cuyas longitudes de onda son conocidas (fig 2). Se determina la función de ajuste ( $\lambda$  vs UT) para la que se utilizó el programa Origin 7.0. La función de ajuste obtenida es un polinomio de segundo grado, con tres parámetros según:

$$\lambda = A + Bx + Cx^2 \quad (1)$$

En la tabla 1 se dan los valores de los tres parámetros de la curva de ajuste (1) y de sus incertidumbres, reportados por el programa utilizado.

La función de ajuste para el prisma del monocromador será entonces:

$$\lambda = 396,28 + 0,014x + 0,00003x^2 \quad (2)$$

donde la  $x$  representa el valor de la posición relativa del prisma a la que se le quiere determinar su correspondiente  $\lambda$ .

## 2 Desarrollo

Una primera evaluación de las incertidumbres de las longitudes de onda determinadas por la expresión (1), para el caso de los filtros, se realizó utilizando la expresión para la incertidumbre combinada según el GUM<sup>1</sup>:

$$u_{sc}^2(\lambda) = u_A^2 + u_B^2 x^2 + u_C^2 x^4 \quad (3)$$

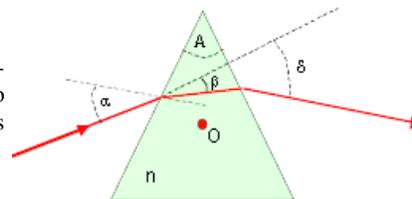
En la que solamente se tiene en cuenta las incertidumbres de los parámetros reportados por el programa utilizado (tabla 1).

Los valores de las incertidumbres de las longitudes de onda de la luz transmitida por los filtros obtenidas según (3) resultaron muy altos; comparables a los valores de los semianchos de banda de los correspondientes filtros. Una discusión del efecto de la covarianza entre en los parámetros de ajuste fue realizada por Taylor<sup>2</sup>, cuestión que nos hizo sospechar que los resultados obtenidos estaban sobrevalorados, por lo que nos dimos a la tarea de hacer una segunda evaluación de las incertidumbres, teniendo en cuenta la correlación entre los parámetros de

ajuste, utilizando la expresión:

$$u_{cc}^2(\lambda) = u_{sc}^2 + 2(u_{(A,B)}^2 x + u_{(A,C)}^2 x^2 + u_{(B,C)}^2 x^3) \quad (4)$$

**Figura 1.** Trayectoria del rayo luminoso a través de un prisma.



**Tabla I**

Valores de los parámetros del ajuste y sus incertidumbres.

Parámetro	Incertidumbre
A = 396,28	$u_A = 5,7$
B = 0,014	$u_B = 0,007$
C = 0,00003	$u_C = 0,000002$

**Tabla II**

Dependencia de los valores de la incertidumbre con la covarianza para los filtros.

Filtro	$\lambda$ transmitido con máxima intensidad (nm)	Semiancho de banda (nm)	Incertidumbre de la longitud de onda $u$ ( $\lambda$ ) según (3) (nm)	Incertidumbre de la longitud de onda $u$ ( $\lambda$ ) según (4) (nm)
Óptico	547,3	41,3	23,2	1,13
Interferencial	632,2	20,1	17,8	1,24

**Tabla III**

Dependencia de los valores de la incertidumbre con la covarianza para la absorción.

$\lambda$ correspondiente a la zona máxima absorción del $SO_4Cu$ (nm)	Incertidumbre de la longitud de onda $u$ ( $\lambda$ ) según (3) (nm)	Incertidumbre de la longitud de onda $u$ ( $\lambda$ ) según (4) (nm)
733,9	23,7	3,62

Como el programa Origin 7.0 no reporta los valores de las covarianzas entre los parámetros de la función de ajuste (1), fue necesario elaborar un programa en Excel

7.0 basado en el método matricial<sup>3</sup> para realizar el ajuste a la función dada en (2) y sus incertidumbres según la expresión (4), obteniéndose los nuevos resultados de las incertidumbres de las longitudes de onda de la luz transmitida por los filtros.

En la tabla 2 se reportan los valores encontrados de las longitudes de onda  $\lambda$  que transmiten los filtros con la máxima intensidad; sus semianchos de banda y las incertidumbres de las longitudes de onda determinadas según la expresión (3) y (4) en la que se observa que los valores de las incertidumbres encontrados según (4) son más aceptables.

Como la función de ajuste (2) es válida para cualquier práctica que se realice en el monocromador, se aplicó a la de absorción del Sulfato de Cobre. En la tabla 3 se reportan los valores encontrados según la expresiones (1), (2) y (3) para este caso.

### 3 Conclusiones

Se observa que las incertidumbres de las longitudes de onda determinadas mediante una función para ajustar un conjunto de puntos experimentales, calculadas sin tener en cuenta las covarianzas entre los parámetros de la función de ajuste están sobre estimados, siendo los valores encontrados para el caso de los filtros comparables con sus semi-anchos de banda. Mediante la aplicación del programa elaborado en Excel 7.0 utilizando el método matricial, el que tenía en cuenta las covarianzas entre los parámetros de la función de ajuste, se encontraron valores de las incertidumbres de las longitudes de onda

transmitidas por los filtros y absorbidas por el sulfato de cobre más aceptables.

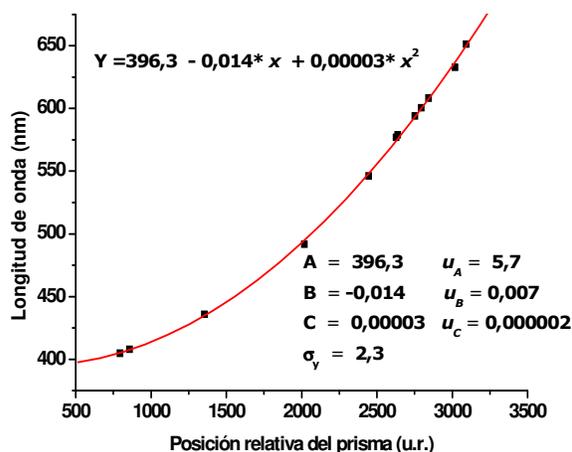


Figura 2. Curva de calibración del prisma

### Referencias

1. BIPM, IEC, IFCC, USO, IUPAC, IUPAP AND OIML Guide for the Expression of Uncertainty Measurement (1995).
2. J. R. Taylor, Simple examples of correlations in error propagation. Am. J. Phys., 53, 663-667 (1985).
3. P.R. Bevington and D.K. Robinson Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences. Second Edition. McGraw-Hill Companies, Inc. 115- 140. (1992).