

MODELACIÓN DE LA CONDUCCIÓN TRANSVERSAL EN COMPÓSITOS SUPERCONDUCTORES

A. BORROTO^{a†}, L. DEL RÍO^a, M. ARRONTE^{b,c} Y E. ALTSCHULER^a

a) Laboratorio de superconductividad, LIES, IMRE-Facultad de Física, Universidad de la Habana, 10400 Habana, Cuba; aborroto@fises.fisica.uh.cu†

b) Laboratorio de Láser Tecnológico, IMRE, Universidad de la Habana, 10400 Habana, Cuba

c) Laboratorio de Tecnología Láser, CICATA-IPN, Altamira 89600, México

† autor para la correspondencia

Se presenta un modelo teórico para dar solución a la distribución de la corriente en compósitos superconductor-metal y se verificó su validez para el caso en que la relación entre ambos componentes se mantiene constante a lo largo de la muestra, que es la situación típica en la dirección longitudinal de conducción. Se obtuvo la distribución de corriente para el caso particular de una cinta de Bi2223/Ag en la dirección transversal, donde la proporción entre el superconductor y la plata es en general no uniforme. Los resultados muestran que las variaciones bruscas de la proporción entre el superconductor y la plata no influyen fuertemente en la distribución de la corriente.

A theoretical model that describes the current distribution in superconductor-metal composites is presented. The model is verified in a case when the relation between both components is kept constant along the sample, typical of longitudinal conduction. The current distribution for a Bi2223/Ag tape in the transversal direction was obtained, where the proportion between the superconductor material and silver is non uniform. Results show that abrupt changes in proportion between superconductor and silver do not cause a significant influence on the current distribution.

Palabras Clave. 74.25.Fy, 74.72.Hs, 74.78.Bz, 74.81.Bd.

INTRODUCCIÓN

Los materiales superconductores se caracterizan por tener resistencia eléctrica nula y ser diamagnéticos perfectos por debajo de cierta temperatura crítica (T_c). Estas propiedades hacen que los superconductores tengan una amplia gama de aplicaciones que van desde delicados sensores de campo magnético (SQUID's) y otros dispositivos electrónicos hasta equipos de resonancia magnética nuclear con potentes imanes superconductores. En aplicaciones donde sea necesario transportar grandes corrientes son muy utilizadas las cintas del superconductor $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+\delta}$ embebido en una matriz de plata (Bi2223/Ag). Estas cintas generalmente se fabrican mediante un método conocido como "powder in tube" que básicamente consiste en llenar de polvo del material superconductor cavidades tubulares existentes en una matriz de plata cilíndrica y luego aplicar varias fases de tratamiento térmico y aplanado hasta lograr la forma plana [1]. En la literatura existe un sinnúmero de publicaciones en las que se estudian las propiedades de transporte de cintas superconductoras a lo largo de la dirección longitudinal. Sin embargo, son muy pocas las que estudian las propiedades de transporte según la dirección transversal. Aunque pueda parecer que en la dirección transversal tiene poca importancia el estudio de las propiedades de transporte, en determinadas circunstancias como son la aparición de rupturas transversales y el establecimiento del estado crítico, resulta que la conducción en esta dirección es determinante sobre la longitudinal.

En este trabajo se presenta un modelo teórico que permite obtener la distribución de corriente en cintas en las cuales se

tenga al material superconductor unido a un metal cualquiera a través de una única interfaz.

En la literatura existen modelos que obtienen la distribución de corriente en cintas superconductoras suponiendo que el material superconductor se encuentra todo el tiempo en estado no disipativo. El modelo que se muestra tiene en cuenta la posibilidad de que en alguna sección del puente esta restricción no esté presente.

Para comprobar la validez del modelo se supuso que el metal con el cual se encontraba mezclado el superconductor era plata y se resolvió el caso más sencillo, en el cual el superconductor y la plata se encontraban en una misma proporción a lo largo de todo el puente. Después se resolvió el caso de una cinta real de $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+\delta}$ embebido en Ag (Bi2223/Ag) en la dirección transversal, incorporando algunos datos experimentales.

MODELO TEÓRICO

El presente modelo supone al superconductor y al metal en el cual se encuentra embebido, que en general puede ser cualquiera, separados por una única interfaz como se muestra en la Figura 1. En la misma la corriente fluye en la dirección del eje x, que puede corresponder a la dirección longitudinal o transversal de la cinta. Obsérvese que los filamentos superconductores han sido "colapsados" en la parte inferior (lo que se explicará en detalle más adelante).

Al igual que Y. Fang y colaboradores², el elemento de volumen mostrado en la Figura 1 se puede representar mediante el circuito diferencial equivalente que se muestra en la Figura 2.

Aquí dR_m es la resistencia del metal que está en contacto con el superconductor y ρ_m es su resistividad; R_i es la resistencia interfacial entre el metal y el superconductor y ρ_i es la resistividad interfacial (en unidades de $\Omega \text{ cm}^2$); dR_{sc} y ρ_{sc} son la resistencia y la resistividad del superconductor cuando se encuentra en estado normal, θ es la función paso unitario de Heaviside y j_c es la densidad de corriente crítica por encima de la cual el superconductor comienza a disipar. La función θ refleja el hecho de que cuando la corriente que circula por el material superconductor en una posición determinada del puente es menor que la corriente crítica, la resistencia del superconductor se anula en esta posición. En caso contrario el superconductor se encuentra en estado normal y su resistencia será la de un material con resistividad ρ_{sc} . Los valores de resistencia referidos anteriormente, así como el de θ , dependen de la posición x .

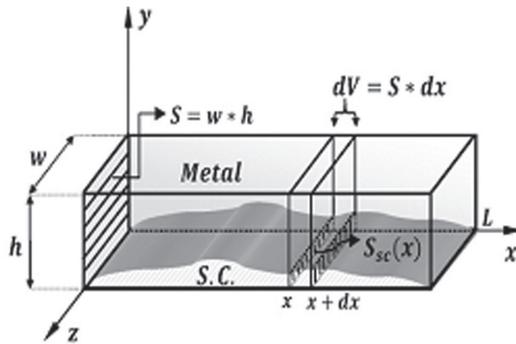


Figura 1. Esquema del compuesto superconductor.

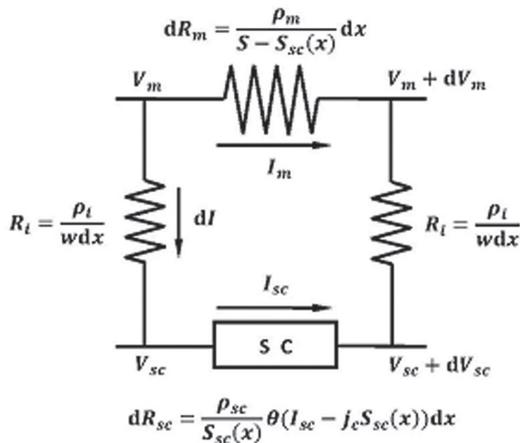


Figura 2. Circuito equivalente al elemento dV en la posición x del puente.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del circuito de la Figura 2 son:

$$dV_m(x) = \frac{\rho_m I_m(x)}{S - S_{sc}(x)} dx \quad (1)$$

$$dV_{sc}(x) = \frac{\rho_{sc} I_{sc}(x)}{S_{sc}(x)} \theta(I_{sc}(x) - j_c S_{sc}(x)) dx \quad (2)$$

$$V_m(x) - V_{sc}(x) = \frac{\rho_i dI(x)}{w dx} \quad (3)$$

Derivando (3) respecto a x , utilizando después (1) y (2), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_m I_m(x)}{S - S_{sc}(x)} + \frac{\rho_{sc} I_{sc}(x)}{S_{sc}(x)} \theta(I_{sc}(x) - j_c S_{sc}(x)) &= \\ = \frac{\rho_i d^2 I}{w dx^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Para la corriente se cumple que:

$$I_0 = I_{sc} + I_m \quad (5)$$

$$dI = dI_{sc} = -dI_m \quad (6)$$

La ecuación (5) se debe al hecho de que la corriente total se distribuye entre el metal y el superconductor y la ecuación (6) refleja que un incremento en la corriente que circula por el superconductor sólo es posible si disminuye la corriente que circula por el metal.

Introduciendo (5) y (6) en (4), y reagrupando convenientemente los términos:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_i d^2 I_m}{w dx^2} + \left[\frac{\rho_m}{S - S_{sc}(x)} + \frac{\rho_{sc} \theta(I - I_m - j_c S_{sc}(x))}{S_{sc}(x)} \right] I_m &= \\ = \frac{\rho_{sc} I}{S_{sc}(x)} \theta(I - I_m - j_c S_{sc}(x)) \end{aligned} \quad (7)$$

Si se supone que la corriente que se le suministra al puente entra y sale por el metal (como se esperaría de dos contactos colocados sobre una de las caras anchas de la cinta), las condiciones iniciales para la ecuación (7) serán:

$$I_m(0) = I_m(L) = I_0 \quad (8)$$

La expresión (7) es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que tiene a x como variable independiente y su solución da cómo se distribuye la corriente en el metal a lo largo de todo el puente. El problema está en que se tiene involucrada a la función paso unitario de Heaviside, la cual hace que una solución analítica sea solo posible para casos particulares. Esto obliga a darle una solución numérica a la ecuación, para lo cual se adimensionalizó como sigue:

$$-\frac{d^2 u(x_\eta)}{dx_\eta^2} + \left[\frac{\rho}{1-s(x_\eta)} + \frac{\theta \left(1 - \frac{s(x_\eta)}{j} - u(x_\eta) \right)}{s(x_\eta)} \right] u(x_\eta) =$$

$$= \frac{1}{s(x_\eta)} \theta \left(1 - \frac{s(x_\eta)}{j} - u(x_\eta) \right) \quad (9)$$

con condiciones de frontera:

$$u(0) = u(1) = 1 \quad (10)$$

donde:

$$u(x) = \frac{I_m(x)}{I}, \quad s(x) = \frac{S_{sc}(x)}{S}, \quad S = w \cdot h,$$

$$\rho = \frac{\rho_m}{\rho_{sc}}, \quad j = \frac{I}{S j_c}, \quad x_\eta = \frac{x}{\eta}, \quad l = \frac{L}{\eta} \quad (11)$$

son magnitudes adimensionales y la variable x_η ahora está en unidades de η , o sea, refleja cuántas veces es x mayor que una longitud característica a la que se le llamó η donde:

$$\eta = \sqrt{\frac{\rho_i h}{\rho_{sc}}} \quad (12)$$

Para resolver numéricamente la ecuación (9) se utilizó un algoritmo conocido como algoritmo Gear3,4 o “predictor-corrector”. Este algoritmo es utilizado, dada su eficiencia y estabilidad numérica, para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden y ha sido probado, al menos, en problemas de dinámica molecular donde intervienen las ecuaciones de movimiento de Newton5.

SOLUCIÓN PARA $S(x)$ CONSTANTE

Tanto en este caso como en el que sigue se supondrá que el metal en que se encuentra embebido el superconductor es plata, por lo que $\rho_m = \rho_p = 1.6 \mu\Omega \text{ cm}$, la longitud transversal del puente es $L = 3.96 \text{ mm}$, y $S = w \times h = 0.3 \times 0.23 \text{ mm}^2$ ya que la cinta usada en nuestro laboratorio tiene estas características. Además, para las mismas, $j_c = 6500 \text{ A/cm}^2$ y se supondrá que $\rho_{sc} \gg \rho_p$.

Como se puede ver, la solución de la ecuación (9) depende de $s(x)$, o sea, de la distribución en la proporción que hay a lo largo del puente entre el superconductor y la plata. Para comenzar, se verá el caso en que $s(x)$ es una función constante a lo largo de todo el puente. Esto servirá para comprobar la validez del método de solución numérico utilizado aquí, mediante una comparación con la solución analítica de este caso obtenida y corroborada experimentalmente por Y. Fang y colaboradores[2].

La solución analítica dada por los propios autores es:

$$I_p(x) = I_0 \left\{ \left[\frac{1 - \cosh(\lambda L)}{\sinh(\lambda L)} \right] \sinh(\lambda x) + \cosh(\lambda x) \right\} \quad (13)$$

donde:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_i d_p}} \quad (14)$$

Aquí d_p es el grosor de la capa de plata.

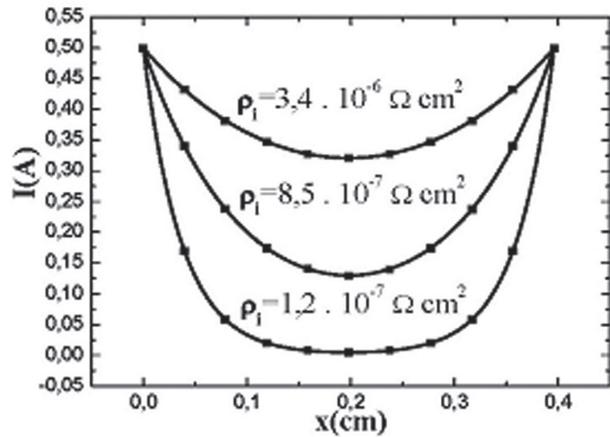


Figura 3. Comportamiento de la corriente en la plata a lo largo del puente a medida que varía la resistividad interfacial. La línea continua representa la solución analítica dada por la ecuación (13) y los puntos representan la solución numérica dada por la ecuación (9).

En la Figura 3 se compara la solución numérica (puntos), dada por la ecuación (9), y la solución analítica (línea continua), dada por la ecuación (13). Solo se mostraron algunos puntos de la solución numérica para una mejor visualización. Para la obtención de los gráficos se utilizó $d_p = 0.18 \text{ mm}$, que coincide con el valor medio de la magnitud correspondiente en nuestra cinta.

Vale aclarar que este caso, resuelto con detalle en la ref. [2], puede ser utilizado para describir lo que ocurre en la dirección longitudinal de la cinta superconductora que se trata.

SOLUCIÓN PARA UNA CINTA REAL DE Bi2223/AG EN LA DIRECCIÓN TRANSVERSAL

A continuación se resolverá la ecuación (9) para un caso en el que la proporción de plata y superconductor es más compleja. En particular se dará solución a la distribución de corriente en la dirección transversal para una cinta real de $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+\delta}$ embebido en Ag (Bi2223/Ag). O sea, en este caso el eje x del modelo es perpendicular a la dirección más “larga” de la cinta.

El modelo desarrollado parte de la suposición de que la plata y el superconductor están separados por una interfaz única. En la práctica, como se puede ver en la Figura 4 (arriba), esto no es así, ya que en realidad los filamentos del BSCCO se encuentran embebidos en la plata. Para resolver este problema, se supondrá que la interconexión entre los filamentos es buena por lo que en cada posición x del puente se colapsarán todos los filamentos de superconductor que se encuentren en la misma. De esta forma se tiene que la superficie que separa a la plata del superconductor tiene la forma que se muestra en la Figura 4 (abajo). Este método ha sido utilizado antes por nuestro equipo.

La longitud del puente es igual a 4.2 mm, pero aquí se resolverá la ecuación para un puente de largo igual a 3.96 mm

ya que en los extremos donde no hay superconductor no es válida la ecuación (9) y lo que se cumple es la ley de Ohm.

Para un mismo valor de resistividad interfacial se estudió cómo variaba la distribución de corriente a lo largo del puente a medida que la corriente suministrada (I_0) iba aumentando. Como se puede ver en la Figura 5, para corrientes pequeñas, ésta se comporta como en el caso en que $s(x)$ es constante (ver Figura 3 cuando $\rho_i = 3.4 \mu\Omega \text{ cm}^2$). Es decir, cuando todo el puente está en estado superconductor las irregularidades de $s(x)$ no ejercen influencia notable sobre la distribución de la corriente. A medida que aumenta la corriente, algunas partes del superconductor empiezan a disipar energía (empezando por las de menor $s(x)$), lo que hace que empiecen a hacerse notar estas irregularidades en la distribución de la corriente.

Es importante destacar que estas irregularidades en la corriente no son tan fuertes como pudiera esperarse. En la Figura 6 se ve que los picos en la corriente se deben a

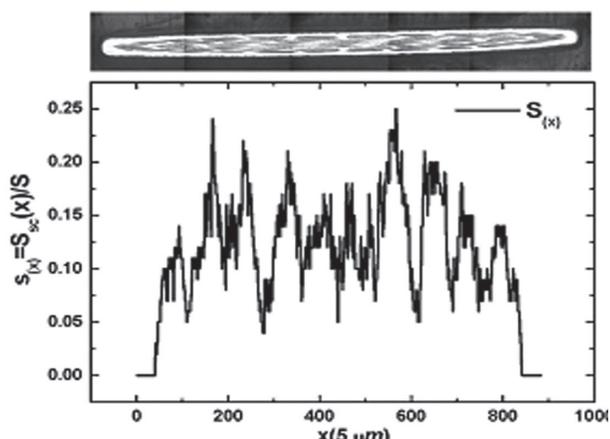


Figura 4: Arriba, sección transversal de una cinta de Bi2223/Ag. En negro se muestran las secciones de los filamentos de BSCCO embebidos en plata (blanco). Abajo, proporción de superficie superconductor entre la superficie total para cada posición x del puente. El valor de $5 \mu\text{m}$ como unidades en el eje de las x se obtiene de dividir $L=4.2 \text{ mm}$ entre 850 pixeles que es el largo de la imagen.

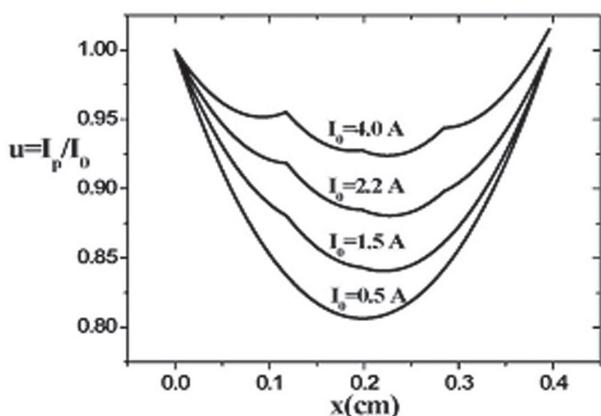


Fig. 5: Distribución de la corriente en la plata para distintos valores de corriente suministrada (I_0) y una resistividad interfacial $\rho_i = 6.8 \mu\Omega \text{ cm}^2$.

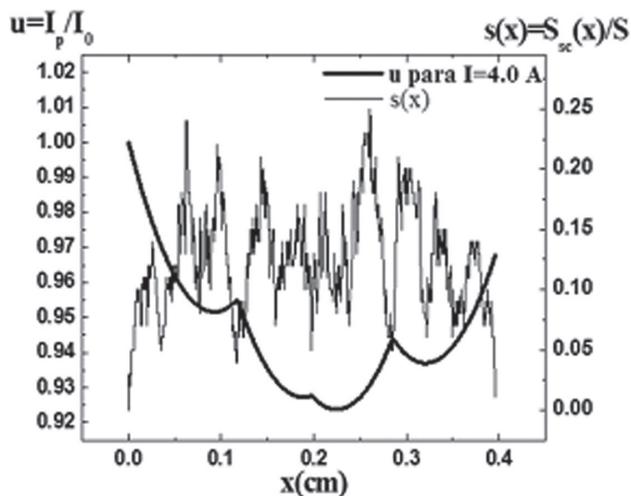


Figura 6. Comparación entre la distribución de corriente para $I=4.0 \text{ A}$ y la forma de $s(x)$.

los mínimos de $s(x)$. Las demás irregularidades prácticamente no se hacen notar. O sea, sólo los cambios más bruscos en la interfaz que hay entre el superconductor y la plata provocan cambios significativos en la distribución de la corriente.

CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo teórico que permite hallar la distribución de corriente en compósitos superconductores. Se verificó la validez del modelo para el caso en que el superconductor y la plata están en la misma proporción. Se muestran los resultados para el caso de la conducción transversal de una cinta de Bi2223/Ag, donde esta proporción no es uniforme. Los mismos muestran que la no uniformidad en la proporción entre la plata y el superconductor no influye fuertemente en la distribución de la corriente.

Actualmente en nuestro equipo se realizan mediciones en cintas de Bi2223/Ag que permitirán comparar en detalle nuestro modelo teórico con resultados experimentales concretos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a J. A. Batista-Leyva por haber inspirado parte de este trabajo, y por útiles discusiones. También a Y. Núñez por sus consejos sobre los métodos numéricos. El sistema de proyectos "Alma Mater" de la Universidad de la Habana financió parcialmente este trabajo.

[1] P. Vase, P. Skov-Hansen, Z. Han, H. F. Poulsen y T. Frello, European Conference on Applied Superconductivity, The Netherlands, 1997.
 [2] Y. Fang, S. Danyluk, Y. S. Cha y M. T. Lanagan, J. Appl. Phys. 79,947 (1996).
 [3] C. W. Gear, The numerical integration of ordinary differential equations of various orders, Technical Report ANL 7126, Argonne National Laboratory, 1966.
 [4] C. W. Gear, Numerical initial value problems in ordinary differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.
 [5] T. Pöschel y T. Schwager, Computational Granular Dynamics, Springer, 2005.