

SIMULACIÓN DE COMPUERTAS LÓGICAS CUÁNTICAS UNIVERSALES MEDIANTE UN MODELO DE CÓDIGO TÓRICO

SIMULATION OF UNIVERSAL LOGIC QUANTUM GATES BY USING A TORIC CODE MODEL

P. MARÍN^{a†} Y J. MAHECHA^a

a) Instituto de Física, Universidad de Antioquia, Colombia. dmarin29@gmail.com

† autor para la correspondencia.

PACS: Many-electron systems, theories of, 71.10.-w, Quantum computation, 03.67.Lx. Anyons, electronic structure, 71.10.Pm.

En la actualidad un tema de alto interés científico es la simulación cuántica de interacciones de espín de muchos cuerpos. Se destaca el modelo de código tórico, en el cual los espines se ubican en los bordes de una red cuadrada sobre la superficie de un toro. En este trabajo se identifica inicialmente el hamiltoniano del sistema. Si la red es de dimensión $k \times k$, el hamiltoniano será una matriz de dimensión $2^{2k} \times 2^{2k}$. Luego se obtiene el operador de evolución temporal del sistema de varios qubits. Ulterior a esto, se construyen compuertas lógicas cuánticas universales. Este trabajo puede tener importancia para establecer una representación de anyones mediante el modelo de código tórico, lo cual permitiría simular compuertas cuánticas topológicas.

Currently a topic of high scientific interest is the quantum simulation of many-body spin interactions. Toric code model is highlighted, in which the spins are located at the edges of a square lattice on the surface of a torus. In this paper the Hamiltonian of the system is initially identified. If the lattice is of dimension $k \times k$, the Hamiltonian is a matrix of dimension $2^{2k} \times 2^{2k}$. The many-qubit time evolution operator of the system is then obtained. Further to this, universal logic quantum gates are constructed. This work may have relevance to establish a representation of anyons by using the toric code model, which would simulate topological quantum gates.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la computación cuántica requiere de un mecanismo tolerante a fallos para tratar con imperfecciones tales como errores de los estados físicos, errores en el material de la memoria, errores en las compuertas lógicas y errores en las medidas [1]. Se ha demostrado [2, 3, 4, 5], que el código de superficie, el cual es un tipo de computación cuántica tolerante a fallos [1, 6, 7], es robusto frente a los errores de pérdida y altamente tolerante a errores de los estados cuánticos. La teoría estabilizadora de corrección de errores cuánticos en computación e información cuántica, permite importar algunos códigos clásicos binarios o cuaternarios para utilizarlos como un código cuántico [8]. En este formalismo es conveniente expresar un estado cuántico como un único autovector simultáneo de operadores que conmutan $X \otimes X$ y $Z \otimes Z$. Estos operadores son llamados operadores estabilizadores, y en la manipulación acertada de estos radica el éxito del modelo tórico. El código de superficie junto con la teoría estabilizadora nos brindan las herramientas teóricas iniciales para la comprensión del código tórico.

Se emplea entonces el formalismo del código tórico para modelar interacciones de espín de muchos cuerpos en una red bidimensional, lo cual nos lleva inicialmente a obtener el hamiltoniano que representa el sistema y que es el primer objetivo a alcanzar. Se soluciona la ecuación de Schrödinger

dependiente del tiempo y se obtiene el operador evolución del sistema $U(t)$, el cual se empleará para simular la dinámica de un estado inicial bien construido según ciertos pulsos o intervalos de tiempo. Al caracterizar tal comportamiento se idea el mecanismo que permite la construcción de compuertas lógicas cuánticas universales.

CÓDIGO TÓRICO

Realmente, el código de superficie evoluciona de una invención del científico ruso Alexei Kitaev conocida como código tórico [2, 9]. Este surge de sus esfuerzos para desarrollar modelos simples que poseen un orden topológico, usando qubits distribuidos sobre la superficie de un toro. De forma general, el código tórico es un código de corrección de errores cuánticos y un ejemplo de código estabilizador definido sobre una red de espines bidimensional con condiciones de borde periódicas. Consideremos una red cuadrada $k \times k$ sobre la superficie de un toro (Figura 1), se ubica un espín o qubit en cada borde de la red (azules en la figura). Podemos decir que disponemos de $n = 2k^2$ qubits en total. Para la figura mostrada, que comprende una red 3×3 , tenemos que $n=18$. Para tal ejemplo, se contaron los qubits hacia la derecha empezando desde el qubit 1 hasta llegar al qubit 18. Los qubits de la línea vertical del extremo derecho de la red, junto con los de la línea horizontal inferior, representan, sobre el toro, qubits "repetidos". Al examinar por ejemplo los qubits conectados por las líneas **a** o **b**, sobre

la superficie del toro, vemos que representan el mismo qubit, y de igual manera con los demás pares. En la figura 1, se ha resaltado en rojo el subsistema de cuatro qubits, prototipo de una plaqueta **p**, y en verde el prototipo de un vértice **v**.

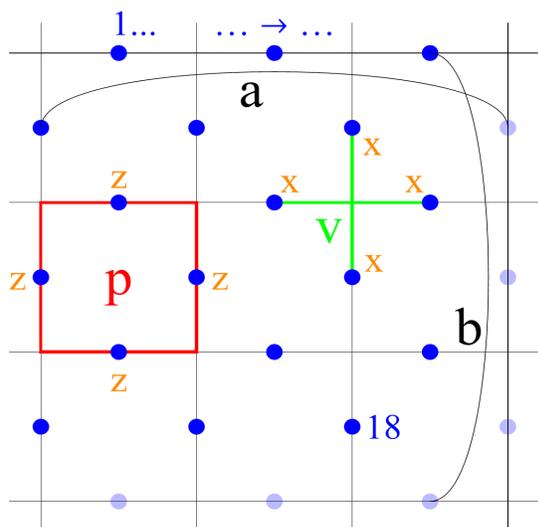


Figura 1. Esquema de un arreglo 3x3 del código tórico. Los puntos azules representan qubits.

Para cada vértice y cada plaqueta se consideran los siguientes operadores: $A_v = \prod_{i \in V} \sigma_i^{(x)}$, $B_p = \prod_{i \in p} \sigma_i^{(z)}$ donde $i \in V$ denota los bordes tocando el vértice V , e $i \in p$ denota los bordes que rodean la plaqueta p . Estos operadores conmutan unos con otros, debido a que plaquetas y vértices tienen ya sea 0 o 2 bordes en común, además, A_v y B_p contienen operadores de Pauli que representan interacciones de espín de cuatro cuerpos, es decir, $\sigma_i^{(x)}$ y $\sigma_i^{(z)}$ son matrices de Pauli aplicadas al qubit en el sitio i . A_v y B_p son también operadores hermíticos con autovalores 1 y -1, y por tanto constituyen un subgrupo abeliano del grupo de Pauli de n qubits, que es un grupo estabilizador [10, 11]. Los operadores A_v y B_p son los operadores estabilizadores del código tórico. Cumplen $\prod_v A_v = 1$ y $\prod_p B_p = 1$, y por tal razón hay $2k^2 - 2$ operadores estabilizadores independientes. Al considerar el espacio de Hilbert H de todos los $n = 2k^2$ qubits, se define un subespacio protegido L como: $L = \{|\xi\rangle \in H : A_v |\xi\rangle = |\xi\rangle, B_p |\xi\rangle = |\xi\rangle, \forall V, p\}$. Sobre el toro, el estado base del código tórico es cuatro veces degenerado y corresponde al autovalor 1 de todos los operadores que conmutan A_v y B_p y que exhiben orden topológico [2, 4, 12, 13, 14]. Decimos entonces que el subespacio protegido coincide con el estado base. Plaquetas o vértices con autovalor igual a -1 son cuasipartículas llamadas cargas magnéticas o cargas eléctricas respectivamente [7].

HAMILTONIANO

Los espines sobre la red interactúan a través del hamiltoniano:

$$H_{TC} = -\sum_v A_v - \sum_p B_p \quad (1)$$

El tamaño del espacio de Hilbert del sistema definido sobre una red cuadrada $k \times k$ es 2^{2k^2} y los operadores estabilizadores constituyen un conjunto completo de operadores que

conmutan con H_{TC} y por tanto todas las excitaciones de H_{TC} pueden ser etiquetadas por los autovalores ± 1 de los $2k^2 - 2$ operadores independientes. Se sigue además que, de la teoría general de códigos cuánticos aditivos [15], la dimensión del espacio protegido L es $2^{2k^2} / 2^{2k^2 - 2} = 4$, que corresponde al estado base 4 veces degenerado (Figura 2). Significa esto que hay $2^{2k^2} - 4$ estados excitados. Lo anterior es consistente con el hecho de que la degeneración del estado base para un hamiltoniano ordenado topológicamente de espín 1/2 definido sobre un toro es 4^g , con $g=1$ el género de la superficie [11, 13]. Tenemos entonces que el estado base coincide con el subespacio protegido L y que todos los estados excitados son separados por un gap de energía $\Delta E \geq 4$ (Figura 2) debido a que la diferencia entre los autovalores de A_v y B_p es 2.

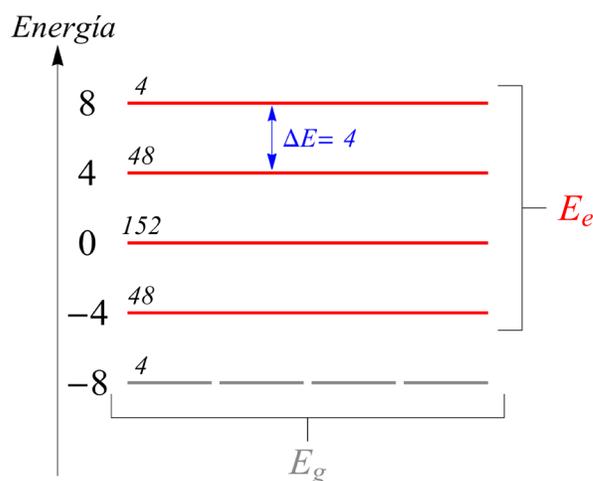


Figura 2. Esquema del espectro del hamiltoniano del código tórico para un arreglo 2x2. E_g representa el estado base cuatro veces degenerado, mientras que E_e representa los estados excitados. Los números a la izquierda sobre líneas representan la degeneración del estado.

ESTADO INICIAL

De entrada podemos suponer infinidad de arreglos iniciales donde se tienen espines orientados hacia arriba $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o hacia abajo $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. El estado inicial por lo tanto, será un producto directo de dichos estados de espín en un determinado arreglo. La idea es que éste pueda evolucionar de manera que permita la construcción de compuertas lógicas cuánticas. Si se toma como estado inicial un autoestado del hamiltoniano (1) y lo evolucionamos mediante el operador $U(t)$, lo único que se obtiene es una fase adicional, es decir, $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = e^{-it\lambda/\hbar}|\psi(0)\rangle$ donde λ representa un autovalor de energía de H_{TC} . Es claro entonces que tales autoestados no proporcionan una evolución del sistema ni una dinámica que permita simular compuertas lógicas cuánticas. Construiremos el estado inicial de tal manera que al evolucionar mediante $U(t)$ podamos identificar operaciones lógicas de qubits como compuertas universales NOT y CNOT.

APLICACIÓN DEL MODELO

Para el caso en que $k=2$ tenemos $n=8$ qubits y por tanto 8 operadores estabilizadores de los cuales 6 son independientes.

Debemos ubicar en la red 4 vértices y 4 plaquetas (Figura 3). El tamaño del espacio de Hilbert es $N=256$, donde el hamiltoniano del sistema es una matriz de dimensión $2^{2k^2} \times 2^{2k^2} = 256 \times 256$. Hay $2^{2k^2} - 4$ estados excitados, donde, en unidades de energía, partimos de 4 estados base (-8), 48 estados excitados (-4), 152 estados excitados (0), 48 estados excitados (4) y 4 estados excitados (8), figura 2.

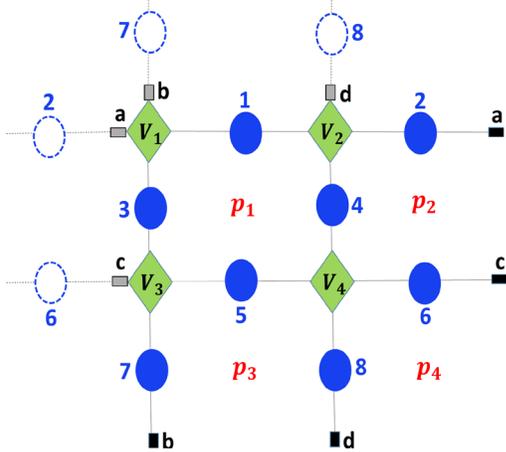


Figura 3. Arreglo de espines en una red 2x2 del código tórico. Las bolas azules representan los espines, los rombos verdes los cuatro vértices y las p_i representan las cuatro plaquetas. El esquema enfatiza en que la red cuadrada es sobre un toro al indicar las conexiones a,b,c,d.

Para $k=2$ y de acuerdo a la figura 3, tenemos los siguientes operadores de vértices y plaquetas: $A_{V1} = \sigma_2^x \sigma_1^x \sigma_7^x \sigma_3^x$, $A_{V2} = \sigma_1^x \sigma_2^x \sigma_8^x \sigma_4^x$, $A_{V3} = \sigma_6^x \sigma_5^x \sigma_3^x \sigma_7^x$, $A_{V4} = \sigma_5^x \sigma_6^x \sigma_4^x \sigma_8^x$, $B_{p1} = \sigma_1^z \sigma_3^z \sigma_4^z \sigma_5^z$, $B_{p2} = \sigma_2^z \sigma_4^z \sigma_3^z \sigma_6^z$, $B_{p3} = \sigma_5^z \sigma_7^z \sigma_8^z \sigma_1^z$, $B_{p4} = \sigma_6^z \sigma_8^z \sigma_7^z \sigma_2^z$ los cuales cumplen $\prod_V A_V = 1$ y $\prod_p B_p = 1$. Se verifica además que el espacio protegido L coincide con el estado base, y que los estados excitados están separados por un gap de energía $\Delta E=4$ al determinar los autovalores del hamiltoniano (1). El operador evolución $U(t)$ claramente define una matriz que nos permite evolucionar un estado inicial $|\psi(0)\rangle$ de 256 componentes.

COMPUERTAS CUÁNTICAS

Se formuló el estado inicial como una superposición de un estado base $|\psi_g\rangle$ y un estado excitado $|\psi_e\rangle$ del hamiltoniano en la forma $|0\rangle = 1/\sqrt{2}(|\psi_e\rangle + |\psi_g\rangle)$. Tal estado surge de aplicar una rotación \sqrt{Z} al estado base $|\psi_g\rangle$ en el espacio de Hilbert. Si se aplica \sqrt{Z} a un estado excitado $|\psi_e\rangle$, se obtiene un estado $|1\rangle = 1/\sqrt{2}(|\psi_g\rangle - |\psi_e\rangle)$ el cual es ortogonal a $|0\rangle$. \sqrt{Z} opera como una rotación de 45° en sentido contrario a las manecillas del reloj. Ahora, al evolucionar el estado $|0\rangle$ mediante $U(t)$ obtenemos un estado $|\psi(t)\rangle$ cuyas componentes diferentes de cero van a depender explícitamente de t . La idea es determinar para qué valores de t se cumple $|\psi(t)\rangle - |1\rangle = 0$. Se resuelve entonces el sistema de ecuaciones obtenido de la anterior operación para la variable t , y se determina el siguiente conjunto solución: $T = \{t_k = \pi/4(2k+1) : |\psi(t = t_k)\rangle - |1\rangle = 0, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Dado que $|0\rangle$ es ortogonal a $|1\rangle$ y que mediante la dinámica de $|0\rangle$ se puede obtener $|1\rangle$, consideramos ambos estados como estados de espín del sistema completo que brindan

la posibilidad de simular una operación NOT. Ahora, para determinar una operación CNOT la situación es un poco más compleja. Debemos idear la manera de identificar un estado $|0\rangle$ y un estado $|1\rangle$ para dos subsistemas dentro del mismo arreglo de espines. Seleccionamos como uno de los subsistemas las interacciones entre vértices y el otro como las interacciones entre plaquetas. Ahora, tal y como se planteó la operación NOT del sistema completo mediante estados ortogonales colectivos, es posible establecer estados de los subsistemas que permitan simular igualmente operaciones NOT, teniendo entonces estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para cada subsistema. Se procede luego a determinar los estados $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$ los cuales brindan la posibilidad de simular una operación CNOT.

CONCLUSIONES

La computación cuántica sin duda alguna nos permite afrontar problemas físicos que poseen gran riqueza conceptual, y que dan un enfoque tanto teórico como experimental. El estudio de códigos de superficie como un tipo de computación cuántica tolerante a fallos, da entrada a un estudio que involucra el análisis de interacciones de muchos cuerpos y que a la vez permiten idear propuestas en la construcción de elementos tan imprescindibles en la computación cuántica como las compuertas lógicas. El modelo de código tórico, el cual representa interacciones de cuatro cuerpos dispuestos en una red bidimensional, mediante sus estados de espín colectivos, permite la construcción de un estado inicial tal que, al evolucionar mediante el operador $U(t)$ del sistema, se puede establecer un conjunto T de valores del tiempo que permiten simular una operación NOT. Al estudiar y analizar en detalle como simular una operación CNOT, se idea un mecanismo que permite construir estados $|i\rangle \otimes |j\rangle$, donde $|i\rangle$ y $|j\rangle$ representan estados ortogonales de subsistemas que surgen del mismo arreglo bidimensional de espines. Tales estados, siguiendo la idea de la operación NOT inicial, permitiría simular una operación CNOT.

[1] S. Nagayama, "Surface Code Quantum Computation on a Defective Physical Lattice". Tesis de Maestría, Keio University, 2011.
 [2] A. Y. Kitaev, Ann. Phys. 303, 2 (2003).
 [3] R. Raussendorf, y J. Harrington, Phys. Rev. Lett. 98, 190504 (2007).
 [4] R. Raussendorf, J. Harrington, y K. Goyal, 2007 New J. Phys. 9 199.
 [5] A. G. Fowler, M. Mariantoni, J. M. Martinis, y A. N. Cleland, Phys. Rev. A 86, 032324 (2012).
 [6] S. B. Bravyi, y A. Y. Kitaev, "Quantum codes on a lattice with boundary", arXiv:quant-ph/9811052v1 (1998).
 [7] E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl, y John Preskill, J. Math. Phys. 43, 4452 (2002).
 [8] D. Gottesman, "Stabilizer Codes and Quantum Error Correction". Tesis de Doctorado, California Institute of

Technology, Pasadena, California, 2008.

[9] A. Y. Kitaev, 1997 Russ. Math. Surv. 52 1191.

[10] O. Viyuela, A. Rivas, y M. A. Martin-Delgado, 2012 New J. Phys. 14 033044.

[11] C. Nayak, H. Simon, A. Stern, M. Freedman, y D. Sarma, Rev. Mod. Phys. 80, 1083 (2008).

[12] H. Weimer, Molecular Physics Vol. 111, Iss. 12-13, 2013.

[13] F. Pollmann, E. Berg, A. M. Turner, y M. Oshikawa, Phys. Rev. B 85, 075125 (2012).

[14] F. Pollmann y A. M. Turner, Phys. Rev. B 86, 125441 (2012).

[15] D. Gottesman, Phys. Rev. A 54, 1862 (1996).

