

FLUJOS NO ESTACIONARIOS DE DISOLUCIONES VISCOELÁSTICAS

ANIER HERNÁNDEZ GARCÍA Y OSCAR SOTOLONGO COSTA

Cátedra de Sistemas Complejos "Henri Poincaré", Facultad de Física, Universidad de la Habana.

A partir del modelo de Oldroyd-B lineal, se obtiene una Ley de Darcy generalizada en el dominio de las frecuencias y se da una expresión explícita para la permeabilidad dinámica. Resultados anteriores para fluidos newtonianos y viscoelásticos se obtienen como caso particular de los nuestros. Son discutidas las características del campo de velocidades generado por gradientes de presión armónicos. Se incluyen además los efectos de la compresibilidad en la propagación de ondas sonoras.

Starting from the linear Oldroyd-B model, a generalized Darcy's Law is obtained in the frequency domain and an explicit expression for the dynamic permeability is given. Previous results in viscoelastic and Newtonian fluids are shown here to be particular cases of our generalized law. Different features of the velocity field generated by harmonic pressure gradients are also discussed, as well as the compressibility effects on the propagation of sound waves.

Palabras Clave. Disoluciones viscoelásticas, flujos no estacionarios, compresibilidad.

INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de fluidos cuya estructura presenta alta complejidad, entre los cuales se encuentran las disoluciones poliméricas, algunos fluidos biológicos, suspensiones, pastas, entre otros. En estos, a diferencia de los fluidos newtonianos donde la viscosidad es independiente del gradiente de velocidades [1], la viscosidad es función de este y en general las tensiones en un instante dado dependerán de la historia de las deformaciones y de los gradientes de velocidades [2-4].

En este artículo nos centramos en el estudio de disoluciones poliméricas, en los cuales numerosos experimentos evidencian estos comportamientos [2-6]. Marcadas diferencias se establecen en los flujos no estacionarios en presencia de cizalladuras, donde la elasticidad de estos líquidos cambia las características de la propagación de ondas que han sido estudiadas para los fluidos newtonianos [1,3,7].

Uno de los modelos más simples que provee una descripción hidrodinámica macroscópica de disoluciones poliméricas, lo constituye el modelo de Oldroyd-B lineal [8]. El mismo, describe comportamientos viscoelásticos básicos de líquidos incompresibles con viscosidad de cizalladura constante y tiempos de relajación y retardamiento constantes.

El artículo se ha organizado de la manera siguiente: en la sección 2 se presenta el modelo de Oldroyd-B lineal y se discuten cualitativamente comportamientos característicos

de estos fluidos al ser sometidos a esfuerzos y deformaciones periódicas. Los perfiles de velocidad que se establecen en el interior de tuberías, creados por gradientes de presión que varían sinusoidalmente en el tiempo son obtenidos en la sección 3 y en la sección 4 se obtiene una Ley de Darcy generalizada en el dominio de las frecuencias. En la sección 5 se estudian las características de la propagación de ondas sonoras en la geometría descrita en el párrafo anterior, al incluir los efectos de la compresibilidad en estos viscoelásticos.

MODELO DE OLDROYD-B LINEAL.

En el modelo de Oldroyd-B lineal la ecuación constitutiva viene dada por

$$\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \eta_0 \left(D + \lambda \frac{\eta_s}{\eta_0} \frac{\partial D}{\partial t} \right) \quad (1)$$

donde σ es el tensor de esfuerzos, λ es una constante con dimensiones de tiempo y tanto η_0 como η_s tienen dimensiones de viscosidad. El tensor D es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidades

$$D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2)$$

De la expresión (1) se infiere que para flujos estacionarios o equivalentemente, flujos en los cuales los esfuerzos y los gradientes de velocidades tienen un período muy grande comparado con λ , la disolución se comporta como un fluido newtoniano cuya viscosidad es la suma de la del sol-

vente y la del polímero, η_0 . Si por otra parte el período de los esfuerzos es del orden del tiempo de relajación λ y la viscosidad del polímero es mucho mayor que la del solvente, el fluido se comporta como un fluido de Maxwell. Por el contrario, cuando los esfuerzos tienen un período muy pequeño comparado con λ , y si se cumple además $\frac{\lambda \eta_s}{\tau \eta_0} \ll 1$, el fluido responderá como un sólido de Hooke, mientras que si este número es mucho mayor que la unidad, el líquido actuará como un newtoniano, de viscosidad igual a la del solvente. La ecuación (1) contiene como casos particulares las correspondientes al modelo de Maxwell y de Newton que se obtienen al tomar los límites $\eta_s \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow 0$, respectivamente.

PERFILES DE VELOCIDAD CREADOS POR GRADIENTES DE PRESIÓN QUE OSCILAN ARMÓNICAMENTE.

Una vez discutidas las características cualitativas del comportamiento de los fluidos de Oldroyd-B sometidos a esfuerzos o deformaciones periódicas, pasemos al estudio de los flujos en el interior de tuberías de sección transversal circular generados por gradientes de presión variables en el tiempo, aplicados en la dirección axial, que tomaremos como z . En esta sección consideraremos específicamente gradientes de presión que oscilan armónicamente.

Podemos escribir entonces

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = K \cos(\omega t) \quad (2)$$

Esta expresión es válida cuando el fluido es incompresible y cuando la longitud del cilindro es mucho mayor que su radio.

Experimentalmente se han impuesto gradientes de presión al colocar un pistón oscilante en uno de los extremos del cilindro [7]. La expresión (2) es una aproximación válida solo en regiones lo suficientemente alejadas del pistón.

Para obtener el campo de velocidades se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \sigma \\ \nabla \cdot \bar{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

en unión a la ecuación constitutiva (1).

Bajo las mismas aproximaciones que permiten obtener la expresión (2) es posible considerar que la única componente no nula de la velocidad es la axial, $\bar{v} = v_z(r, t) \mathbf{e}_z$. Por consideraciones de simetría esta componente solo dependerá de la distancia al eje del cilindro, que se denotará por r . Buscaremos entonces la solución en la forma

$$v_z(r, t) = \text{Re} \left\{ \varphi(r) e^{-i\omega t} \right\} \quad (4)$$

Al sustituir esta relación en la ecuación (3), expresán-

dola en coordenadas cilíndricas se arriba a una ecuación de Helmholtz para $\varphi(r)$, que unida a la condición de no deslizamiento sobre la pared del cilindro determina unívocamente la solución, expresada mediante

$$\varphi(r) = \frac{1}{i\omega\rho} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \frac{dp}{dz} \quad (5)$$

siendo R es el radio del cilindro y la función de Bessel de orden cero, cuyo argumento se determina por la relación

$$\beta^2 = -\frac{i\omega\lambda}{\eta_0} \frac{1+i\omega\lambda}{1+i\omega\lambda \frac{\eta_s}{\eta_0}} \quad (5.1)$$

Por tanto de las expresiones (5) y (5.1) se obtiene el campo de velocidades como función de r y t . Si hacemos se obtiene la solución para fluidos newtonianos [7]. Las figuras (1), (2) y (3) muestran las características del perfil de velocidades para estos, así como los correspondientes a Maxwell y Oldroyd-B.

En estas figuras se ha graficado la velocidad $A(\xi)$ que es la velocidad axial, medida en unidades de $\frac{KR^2\rho}{\eta_0}$ en función de la distancia radial ξ , medida en unidades del radio del cilindro R . La función depende de los números adimensionales

$$\alpha = \frac{\omega R^2 \rho}{\eta_0}, \quad A = \frac{\lambda \eta_0}{R^2 \rho} \quad \text{y} \quad \eta' = \frac{\eta_s}{\eta_0}.$$

El número α es el número de Reynolds para flujos no estacionarios, puesto que da la razón entre las fuerzas de inercia $\rho \frac{\partial v_z}{\partial t}$ y las fuerzas viscosas $\eta_0 \nabla_r^2 v_z$. El número A , inverso del número de Deborah, provee la relación entre el tiempo característico de los efectos elásticos y el tiempo característico $\frac{R^2}{\nu_0}$ de la difusión de la vorticidad.

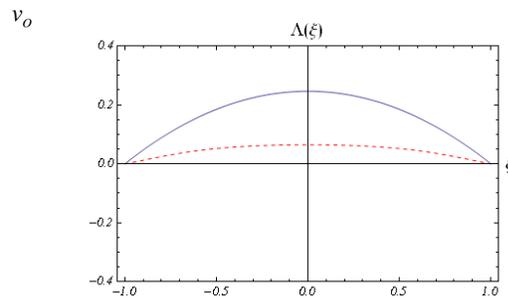


Figura 1. Perfil de velocidades para fluidos newtonianos que corresponde al límite $A \rightarrow 0$ en (5.1). En el perfil representado por la línea continua el valor de A es 1, mientras que la línea discontinua corresponde $\alpha = 18$

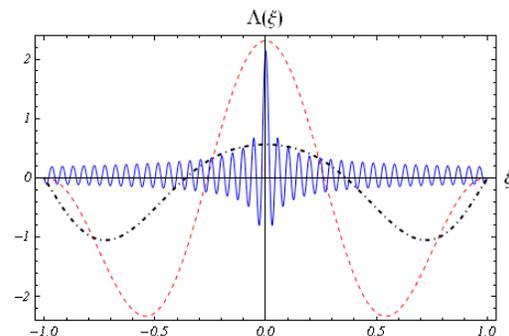


Figura 2. Superposición de los perfiles de velocidades para fluidos de Maxwell, representado por la curva continua ($\alpha = 18.5$) y por la línea discontinua ($\alpha = 1$) con los correspondientes a los fluidos de Oldroyd-B, curva de líneas y puntos ($\alpha = 1$, $\eta' = 10^{-2}$). En los tres perfiles mostrados el valor tomado para A es 50.

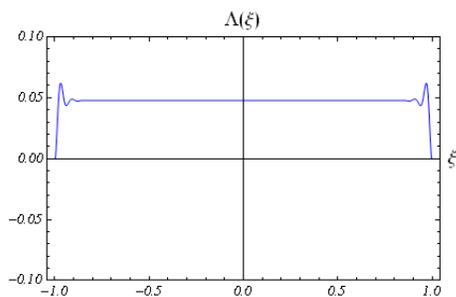


Figura 3. Perfil de velocidades para fluidos de Oldroyd-B. En el gráfico se tomaron los valores $A=50$, $\alpha = 1$ y $\eta_s/\eta_0 = 10^{-2}$.

Los perfiles han sido obtenidos en el instante en el cual la velocidad en el eje del cilindro alcanza su valor máximo. En los fluidos newtonianos, figura 1, para pequeño se observa la formación de un perfil parabólico, semejante al flujo de Hagen-Poiseuille. Al crecer se observa que solo existe un gradiente de velocidad cercano a la pared, esto evidencia la formación de un perfil con características de capa límite [7]. En los gráficos correspondientes al modelo de Maxwell y Oldroyd-B, figura 2, se aprecia cómo la elasticidad afecta la propagación de ondas de cizalladuras donde vemos la formación de flujos de Couette, incluso para pequeño. Esto ha sido verificado experimentalmente y predicho cualitativamente por el modelo de Maxwell, aunque este predice velocidades mayores que las observadas [9]. El modelo de Maxwell predice un fortalecimiento de los efectos elásticos al aumentar α , que se manifiestan al formarse zonas adyacentes de poco espesor con velocidades contrarias. Sin embargo, en la figura 3 correspondiente al modelo de Oldroyd-B, se aprecia que los efectos elásticos son menos notables que en el modelo de Maxwell al aumentar α , teniéndose perfiles con características de capa límite semejante a los newtonianos, pero con un espesor menor. La formación de flujos con características de capa límite en disoluciones poliméricas, hasta donde los autores conocen, no ha sido predicha teóricamente.

LEY DE DARCY GENERALIZADA.

En el caso en el cual se establecen gradientes de presiones que varíen arbitrariamente en el tiempo es posible estudiar las características de la dinámica del fluido viscoelástico en el espacio de las frecuencias, al aplicar la transformada de Fourier al sistema ecuaciones (3), unido a la relación constitutiva (1). Al igual que para $\varphi(r)$ se obtiene una ecuación de Helmholtz para la transformada de Fourier de la velocidad $\tilde{v}_z(r, \omega)$. Resolviéndola se obtiene

$$\tilde{v}_z(r, \omega) = \frac{1}{i\omega\rho} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \frac{d\tilde{p}}{dz}(\omega) \quad (8)$$

en la cual β ha sido definido según (7.1). El promedio de la velocidad por la sección transversal, relacionado directamente con el gasto a través de esta, se puede calcular a partir de la ecuación (9). Por tanto, se tendrá

$$\langle \tilde{v}_z(r, \omega) \rangle_r = \left\langle \frac{1}{i\omega\rho} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right) \right\rangle_r \frac{d\tilde{p}}{dz}(\omega) \quad (9)$$

Este es un resultado análogo a la Ley de Darcy, que expresa esta misma relación en el tiempo. Podemos definir equivalentemente la permeabilidad dinámica como:

$$K(\omega) = - \frac{\eta_0 \langle \tilde{v}_z(r, \omega) \rangle_r}{\frac{d\tilde{p}}{dz}} \quad (10)$$

A partir de esta función, es posible determinar el gasto como función del tiempo mediante la ecuación

$$Q(t) = \pi R^2 \int d\tau \frac{K(t-\tau)}{\eta_0} \frac{dp}{dz}(\tau) \quad (11)$$

donde $K(t)$ y $\frac{dp}{dz}$ son la transformada inversa de Fourier de la permeabilidad dinámica y el gradiente de presiones, respectivamente.

En la figura (4) se ha graficado el valor absoluto de la permeabilidad dinámica re-escalada por su valor bajo flujo estacionario. La frecuencia a su vez ha sido medida en unidades del tiempo característico $\frac{R^2}{\nu_0}$. De esta forma la permeabilidad dinámica depende de los mismos números α, A y η' definidos en la sección anterior.

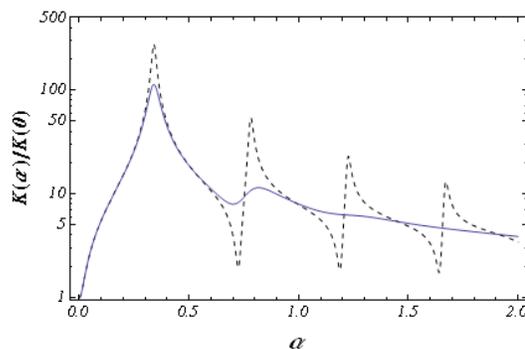


Figura 4. Valor absoluto de la permeabilidad dinámica definida en (11). La curva discontinua corresponde al modelo de Maxwell con $A=150$, mientras que la curva continua representa el resultado para el modelo de Oldroyd-B con el mismo valor de A y $\eta' = 10^{-3}$.

En esta figura se compara el comportamiento de $K(\omega)$ para fluidos de Maxwell y fluidos de Oldroyd-B, considerando en estos últimos que la viscosidad del polímero bajo flujo estacionario es mucho mayor que la del solvente, $\eta' = 10^{-3}$. Como se puede apreciar, para valores de α bajos ambos modelos predicen similares resultados. Sin embargo, las diferencias comienzan a ser muy notables a medida que aumenta α dado que aumenta el número $\alpha A \eta' = \omega \lambda \eta'$, por lo cual la componente newtoniana se torna más relevante y los efectos disipativos predominan.

EFFECTOS VISCOELÁSTICOS SOBRE LOS ESFUERZOS NORMALES.

Como fue destacado en la sección 2, el modelo de Oldroyd-B asume que la disolución es incompresible. Para incluir los efectos de la compresibilidad en los flujos que se establecen en la geometría descrita en las secciones anteriores, utilizaremos la generalización al modelo de Oldroyd-B propuesta en [10], donde se asume que la traza del tensor de esfuerzos viscoelásticos satisface la relación

$$\text{Tr}\sigma + \lambda_2 \frac{d\text{Tr}\sigma}{dt} = 3\eta_2 \nabla \cdot \bar{v} \quad (12)$$

en la cual η_2 y λ_2 son la viscosidad y tiempo de relajación asociados a los esfuerzos normales, respectivamente.

Al igual que en [10] se considerará que la velocidad de las partículas en la onda sonora es mucho menor que la velocidad del sonido en el medio. Además se estudiarán ondas en las cuales tanto la densidad, como la presión y la velocidad realizan pequeñas oscilaciones alrededor de sus respectivos valores de equilibrio. Bajo estas hipótesis, se demuestra en [10] que, las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento, de conservación de la masa y constitutiva pueden ser linealizadas.

Al igual que en [10] consideraremos dos situaciones límites en la propagación de las ondas. Una de estas está dada por la suposición de que las variaciones de presión, velocidad y densidad tienen períodos muy grandes y consecuentemente los procesos ocurrirán bajo equilibrio térmico. Consideraremos en el otro caso límite que los períodos en los cuales ocurren las fluctuaciones de las magnitudes en cuestión son muy pequeños; en este caso, los procesos en la onda tendrán lugar a entropía constante. En ambas situaciones las fluctuaciones de la presión serán función solo de las variaciones de densidad. Entonces se obtiene

$$c_x^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_x \quad (13.1)$$

En [10], bajo estas aproximaciones se derivó una ecuación para las oscilaciones pequeñas de la presión y las relaciones de dispersión para una onda plana. En cuanto al problema que nos ocupa, al igual que en las dos secciones anteriores supondremos que en un instante dado la presión es constante sobre la sección transversal del cilindro. Utilizando los resultados referidos en [9] bajo la suposición de que dentro de la tubería se propagan de izquierda a derecha ondas viajeras planas es posible demostrar que la componente axial de la velocidad, única no nula, es proporcional al gradiente de presiones, al igual que en el caso incompresible. Por tanto, se puede definir una permeabilidad dinámica $K_c(\alpha)$ para los fluidos compresibles dada por

$$K_c(\alpha) = \frac{2R^2}{i\alpha - \varepsilon'_c} \int_0^1 \left(1 - \frac{J_0(\beta'_c \xi)}{J_0(\beta'_c)} \right) \xi d\xi \quad (14)$$

en la cual se han definido α y ξ al igual que en la sección anterior y además se tiene

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_c'^2 &= \frac{k'^2}{1-i\alpha A} \left(\frac{4}{3} \left(1 - \frac{\eta_s}{\eta_o} \right) + \frac{\eta_2}{\eta_o} \right) \\ k'^2 &= \left(\frac{\alpha}{\text{Re}_x} \right)^2 \left(1 + \frac{i\alpha}{\text{Re}_x^2} \left[\eta' + \frac{1}{1-i\alpha A} \left(\frac{4}{3} \left(1 - \frac{\eta_s}{\eta_o} \right) + \frac{\eta_2}{\eta_o} \right) \right] \right)^{-1} \\ \beta_c'^2 &= (i\alpha - \varepsilon_c') \frac{1-i\alpha A}{1-i\alpha A \eta'} \\ \text{Re}_x &= \frac{c_x R \rho_o}{\eta_o} \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Del resultado anterior vemos que los efectos compresibles están contenidos en los números Re_x y $\frac{\eta_2}{\eta_o}$. Es usual que la segunda viscosidad sea del orden de $\eta_o[1]$, lo cual conduce a que $\frac{\eta_2}{\eta_o} \approx 1$.

Si se toma el límite $c_x \rightarrow \infty$ ($\text{Re}_x \rightarrow \infty$) en (14.1) resulta que $k'^2 \rightarrow 0$ y consecuentemente

$$\beta_c'^2 = \beta^2 = i\alpha \frac{1-i\alpha A}{1-i\alpha A \eta'} \quad (15)$$

Por tanto en este límite, la permeabilidad dinámica para el caso compresible, definida en (14) coincidirá con la permeabilidad dinámica, definida en (10). A continuación se muestra gráficamente la permeabilidad dinámica para varios números Re_x .

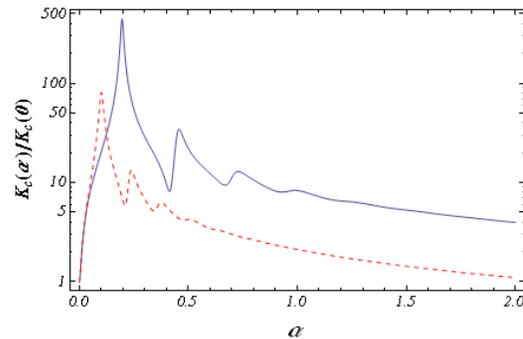


Figura 5. Valor absoluto de K_c en la expresión (14), normalizado por su valor a frecuencia cero, para dos valores de Re_x . Se tomaron para ambas curvas los valores $A=150$ y $\eta'=10^{-3}$. La línea continua fue graficada para $\text{Re}_x = 100$, mientras que en la discontinua se usó el valor $\text{Re}_x = 0.1$.

En la figura 5 se pueden apreciar los efectos de la compresibilidad al variar el número α . Si se comparan las líneas continuas de las figuras (4) y (5) vemos que coinciden perfectamente y por tanto no se manifiestan los efectos de la compresibilidad para $\text{Re}_x = 100$. Al disminuir este número ($\text{Re}_x \leq 1$) los máximos de la permeabilidad se desplazan y disminuye la amplitud de estos.

CONCLUSIONES

En este artículo hemos discutido algunos efectos no newtonianos en flujos no estacionarios de disoluciones viscoelásticas modeladas por la ecuación constitutiva de Oldroyd-B, en su aproximación lineal. Por tanto, dos contribuciones fundamentales son consideradas: una newtoniana dada por el solvente y la contribución visco-elástica por el polímero. Se demostró que los efectos puramente viscosos en estas disoluciones dependen

del número $\omega\lambda\eta'$, obteniéndose dos casos límites importantes, cuando $\omega\lambda\eta' \rightarrow 0$ la disolución se comporta como un fluido de Maxwell y cuando $\omega\lambda\eta' \gg 1$ la disolución se comporta como un fluido viscoso cuya viscosidad es igual a la del solvente. Se observó la formación de flujos de Couette en líquidos de Maxwell y Oldroyd-B para valores de $\alpha\lambda\eta'$ de la unidad y que, al crecer este número, se crean perfiles con características de capa límite tanto en los newtonianos como en los de Oldroyd-B. Se obtuvo una Ley de Darcy en el dominio de las frecuencias y una expresión para la permeabilidad dinámica. El valor absoluto de esta función presenta picos para ciertas frecuencias en los líquidos de Maxwell y de Oldroyd-B. En estos últimos se ven amortiguados al aumentar el número $\alpha\lambda\eta' = \omega\lambda\eta'$, debido al fortalecimiento de la componente newtoniana. Se incluyeron los efectos de la compresibilidad en la permeabilidad dinámica, los cuales están contenidos en el número Re_x . Estos son significativos solo cuando $Re_x \leq 1$.

-
- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Fluid Mechanics", (Pergamon Press, Second Edition, 1987)
 - [2] R.G. Larson "The Structure and Rheology of Complex Fluids", (Oxford University Press, 1999).
 - [3] R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, "Transport Phenomena", (John Wiley & Sons, Second Edition, 2002).
 - [4] R. Metzler and T.F. Nonnenmacher, "Fractional relaxation processes and fractional rheological models for the description of a class of viscoelastic materials", (International Journal of Plasticity, 19 (2003) 941–959)
 - [5] D.F. James, "Boger Fluids", Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 41: 129-142 (January 2009).
 - [6] D.G. Choi, W.J. Kim and S.M. Yang "Shear induced microstructure and rheology of cetylpyridium chlo-ride/sodium salicylate micellar solutions", (Korea-Australia Rheology Journal, Vol.12, No. 3, 143-149)
 - [7] H. Schlichting, "Boundary Layer Theory", (McGraw-Hill, Seventh Edition, 1979).
 - [8] J.G. Oldroyd, "Non Newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids", (Proc. R. Soc. A 245 (1958))
 - [9] M. Torralba, J.R. Castrejón-Pita, A.A. Castrejón-Pita, G. Huelsz, J.A. del Río, and J. Ortín "Measurements of the bulk and the interfacial velocity profiles in oscillating Newtonian and Maxwellian fluids", (arXiv:physics/0505073v1/ [physics.flu-dyn] 10 May 2005).
 - [10] O. Sotolongo, J. M. Antuña and A. Vázquez, (Brazilian Journal of Physics, Vol. 27, No. 3)