

ONDAS ESTACIONARIAS ESFÉRICAS EN LÍQUIDOS COMPRESIBLES

STATIONARY WAVES IN COMPRESSIBLE LIQUIDS

JOSÉ MARÍN ANTUÑA† Y JAVIER PARDO VEGA

Dpto. de Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de la Habana, C.P.10400, La Habana, Cuba. marin@fisica.uh.cu
 †autor para la correspondencia

A partir de un modelo simple para las ondas esféricas de pequeña amplitud en un fluido ideal compresible bajo condiciones de contorno oscilatorias, se calcula la dependencia radial de las ondas estacionarias de presión y de velocidad. Las frecuencias propias son determinadas y se analiza el espectro de frecuencias. El problema es tratado por su relación con la dinámica de una burbuja y la sonoluminiscencia.

The radial dependence of stationary waves of pressure and velocity are computed in a simple model for small amplitude spherical waves in an ideal compressible fluid under oscillatory boundary conditions. The eigenfrequencies are determined and the frequency spectrum is analyzed. This problem is discussed due to its relation with bubble dynamics and sonoluminescence.

Keywords. Standing waves, acoustic, linear, *43.20.Ks, compressible flows, 47.40.Rs

INTRODUCCIÓN

La irradiación de un líquido con sonido de suficiente presión provoca la formación y oscilación de burbujas. Este proceso se conoce como cavitación acústica y es la causa de la sonoluminiscencia y la sonoluminiscencia. [1] Dentro de un amplio espacio de parámetros, las burbujas pueden realizar oscilaciones altamente no lineales caracterizadas por un lento aumento de su volumen seguida de una compresión y una implosión. Alrededor del punto de máxima implosión ocurren las reacciones químicas y se observa la emisión de luz. Aunque la cavitación es usualmente conocida como un fenómeno que produce desgaste de las máquinas hidráulicas; la elevada temperatura, presión y concentración de radicales alcanzadas en el interior de las burbujas ha dado lugar a muchas aplicaciones beneficiosas. La cavitación acústica en un líquido irradiado con ultrasonido puede describirse con excelente precisión durante casi todo el proceso de formación, crecimiento y compresión. Pero la descripción teórica de la última etapa del colapso implosivo es muy complicada. Cuando la presión acústica aplicada es relativamente baja el movimiento radial de una burbuja en el campo de sonido es lineal. Una onda de presión del campo acústico con forma sinusoidal oscila entre compresión y rarefacción, el movimiento radial de la burbuja responde en consecuencia. Durante la rarefacción el volumen de la burbuja aumenta debido a la disminución de la presión del líquido circundante. Cuando el campo acústico está en compresión el volumen de la burbuja disminuye debido al incremento de la presión. El movimiento lineal de la burbuja estaría entonces caracterizado por expansiones y contracciones de casi igual rapidez sin cambio de fase respecto al campo acústico, este es el caso analizado

en este trabajo. Este tipo de movimiento radial de la burbuja no exhibe sonoluminiscencia.

Para presiones acústicas elevadas el movimiento de la burbuja se vuelve altamente no lineal. Veamos la siguiente situación que nos ayudará a entender este movimiento no lineal. Si la burbuja inicialmente tiene el radio a condición ambiente, cuando la onda de presión entra en la fase de rarefacción, la burbuja comienza un crecimiento relativamente lento y lineal la mayor parte del tiempo. Cuando la onda de presión entra en la fase de compresión, para presiones elevadas el movimiento de la burbuja se desvía considerablemente del mostrado para presiones pequeñas.

La burbuja continúa expandiéndose inercialmente y luego comienza un rápido colapso. La velocidad de este colapso en sus últimas etapas puede ser enorme. Mientras continúa la fase de compresión de la onda de presión, la burbuja sigue disminuyendo su radio hasta alcanzar su radio mínimo. Aquí es cuando ocurren las reacciones químicas de alta energía y la emisión de luz. Como el gas y el vapor presentes en el interior de la burbuja son fuertemente comprimidos, la burbuja rebota y se expande.

La burbuja continúa con una serie de compresiones y expansiones secundarias que disminuyen en amplitud hasta volver nuevamente al reposo con el radio inicial. Este tipo de movimiento es típico de la sonoluminiscencia de una sola burbuja. [1] La cavitación de una sola burbuja puede mostrar una notable estabilidad.

El movimiento radial no lineal de una burbuja guiada acústicamente se modela usualmente a través de alguna de las ecuaciones relacionadas con la ecuación de Rayleigh-Plesset. Estas ecuaciones pueden variar en complejidad y muchos investigadores han contribuido a su desarrollo. Los estudios anteriores a 1977 sobre la dinámica de una sola burbuja de gas o vapor en un líquido incompresible o casi incompresible aparecen reseñados por M. S. Plesset y A. Prosperetti. [2] En un trabajo posterior de Z. C. Feng y L. G. Leal, se describen los avances en la comprensión de la dinámica de burbuja debido a la introducción de las ideas y técnicas de los sistemas dinámicos. [3] Existen además estudios numéricos muy completos en los cuales se tiene en cuenta la dependencia radial de las magnitudes, importantes procesos que ocurren en el interior de la burbuja como son las reacciones químicas y a través de la superficie de la burbuja como son la transferencia de calor y masa entre el gas interior y el líquido exterior. [4]

En el presente trabajo se estudian las ondas estacionarias esféricas de pequeña amplitud en un fluido ideal compresible bajo condiciones de contorno oscilatorias, por su relación con la dinámica lineal de una burbuja esférica guiada por una presión acústica externa de pequeña amplitud. Para ello se calcula la dependencia radial de las ondas estacionarias de presión y de velocidad, y se analiza

1 espectro de frecuencias.

2 Planteamiento del Problema

Consideremos un líquido compresible contenido entre dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 , tales que $R_1 < R_2$. Despreciaremos la viscosidad y los términos convectivos, para ello suponemos que los números de Reynolds Re y de Strouhal St son mucho mayores que la unidad ($Re \gg 1$, $St \gg 1$). Ello significa que la velocidad del fluido debido a la perturbación es mucho menor que la velocidad del sonido. Bajo estas condiciones las ecuaciones que rigen el problema son lineales.

La dinámica del fluido está descrita por las ecuaciones de conservación de la masa y el momento. Debido a la simetría esférica del problema estas se expresan como

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

$$u_1(r, t) = \frac{(k_1 R_1)^2}{(k_1 r)^2} \frac{\sin(k_1 R_2 - k_1 r) + k_1 r \cos(k_1 R_2 - k_1 r)}{\sin(k_1 R_2 - k_1 R_1) + k_1 R_1 \cos(k_1 R_2 - k_1 R_1)} u_1 \cos \omega_1 t \quad (5)$$

$$p_1(r, t) = \bar{p}_1(r) + \tilde{p}_1(r, t) = \bar{p}_1(r) - \rho c \frac{(k_1 R_1)^2}{k_1 r} \frac{\sin(k_1 R_2 - k_1 r)}{\sin(k_1 R_2 - k_1 R_1) + k_1 R_1 \cos(k_1 R_2 - k_1 R_1)} u_1 \sin \omega_1 t \quad (6)$$

$$u_2(r, t) = \frac{\Delta p_2}{\rho c} \frac{k_2 R_2}{(k_2 r)^2} \frac{k_2(r - R_1) \cos(k_2 r - k_2 R_1) - (1 + k_2 r k_2 R_1) \sin(k_2 r - k_2 R_1)}{\sin(k_2 R_2 - k_2 R_1) + k_2 R_1 \cos(k_2 R_2 - k_2 R_1)} \cos(\omega_2 t) \quad (7)$$

$$p_2(r, t) = \bar{p}_2(r) + \tilde{p}_2(r, t) = \bar{p}_2(r) + \Delta p_2 \frac{k_2 R_2}{k_2 r} \frac{\sin(k_2 r - k_2 R_1) + k_2 R_1 \cos(k_2 r - k_2 R_1)}{\sin(k_2 R_2 - k_2 R_1) + k_2 R_1 \cos(k_2 R_2 - k_2 R_1)} \sin(\omega_2 t) \quad (8)$$

donde u es la velocidad del fluido debido a la onda, p es la variación de la presión, c es la velocidad del sonido en el líquido y ρ es su densidad media.

La esfera interior se considera oscilante en torno al radio medio R_1 , es decir, $R_1(t) = R_1 + \Delta R_1 \sin \omega_1 t$ con $\Delta R_1 \ll R_1$. Como hemos supuesto que la velocidad del fluido debido a la perturbación es mucho menor que la velocidad del sonido ($S_1 \gg 1$) y para ser consecuentes con la aproximación de primer orden, la condición de contorno para la esfera interior se reduce a

$$u(\bar{R}_1, t) = u_1 \cos \omega_1 t. \quad (3)$$

Aquí hemos definido $u_1 = \Delta R_1 \omega_1$.

Para la esfera exterior, producto de una presión externa oscilante se impone la siguiente condición de contorno

$$p(R_2, t) = p_2 + \Delta p_2 \sin(\omega_2 t). \quad (4)$$

El problema planteado se resuelve con ayuda del principio de superposición.

ONDAS ESTACIONARIAS ESFÉRICAS

Buscaremos la solución en la forma $u(r, t) = u_1(r, t) + u_2(r, t)$, $p(r, t) = p_1(r, t) + p_2(r, t)$; donde u_1, p_1 satisfacen condiciones de contorno oscilatorias para la velocidad en $r = R_1$ y homogéneas para la presión en $r = R_2$ y u_2, p_2 satisfacen condiciones de contorno oscilatorias para la presión en $r = R_2$ y homogéneas para la velocidad en $r = R_1$.

Las soluciones u_1, p_1 y u_2, p_2 pueden expresarse a través de las funciones de Bessel y Neumann de orden $1/2$ y $3/2$. Sustituyendo las expresiones de las funciones de Bessel y Neumann, y simplificando, podemos expresar las soluciones en términos de funciones trigonométricas. Si definimos $k_1 = \frac{\omega_1}{c}$ y $k_2 = \frac{\omega_2}{c}$ que son los números de onda correspondientes a las frecuencias ω_1 y ω_2 respectivamente, las soluciones se pueden escribir como:

Luego, la solución del problema inicial para las ondas estacionarias esféricas en un fluido compresible se expresa a través de estas dos soluciones

$$u(r, t) = u_1(r, t) + u_2(r, t) \quad (9)$$

$$p(r, t) = \bar{p}(r) + \tilde{p}_1(r, t) + \tilde{p}_2(r, t) \quad (10)$$

El término $\bar{p}(r)$ representa la presión de equilibrio y es independiente del tiempo, este debe satisfacer la condición $p(R_2) = p_2$.

Como se observa en (9) y (10) la solución del problema inicial es la suma de dos contribuciones, la respuesta (u_1, p_1) debido a la oscilación de la esfera interior y (u_2, p_2) debido a la oscilación de la esfera exterior. Podemos analizar cada contribución por separado. En ella, k_1 representa el número de onda asociado a la oscilación de la burbuja (esfera interior) y k_2 representa el número de onda asociado a la excitación acústica externa. Cuando una de las frecuencias w_1 o w_2 correspondientes a las oscilaciones de las fronteras se iguala a una de las frecuencias propias del problema ocurre la resonancia; las frecuencias propias se determinan a partir de la ecuación

$$\tan \left[\frac{\omega}{c} (R_2 - \bar{R}_1) \right] = -\frac{\omega}{c} \bar{R}_1. \quad (11)$$

Cuando una de las frecuencias w_1 o w_2 se aproxima a alguna de estas frecuencias propias, dicho modo de oscilación es especialmente excitado, se amplifica la amplitud de las oscilaciones y la no linealidad del problema no puede ser despreciada. Para ese caso, las soluciones aquí planteadas no serán válidas.

Analicemos las características de la solución dependiendo de los valores de las frecuencias. Cuando $k_1 R_1 \ll 1$ la oscilación de la esfera interior ejerce poca influencia y tendremos que (u_1, p_1) tiende a cero. Cuando $k_2 R_2 \ll 1$ la presencia de la esfera interior ejerce poca influencia sobre la solución (u_2, p_2) y esta tiende a la del problema con una sola esfera de radio R_2 . Para $k_1 R_2 \ll 1$ o $k_2 R_2 \ll 1$ el perfil de la onda estacionaria (u_1, p_1) o (u_2, p_2) es bastante homogéneo en cada caso, existiendo una débil dependencia radial; la frontera correspondiente oscila lentamente, de modo que el fluido oscila como un todo.

Para la región de frecuencias que cumplen $k_1 R_1 \sim 1$ y $k_1 R_2 \sim 1$ la dependencia radial típica de la solución (u_1, p_1) se muestra en la Fig. 1. Para trazar los gráficos hemos empleado cantidades adimensionales. Se observa que el perfil de la onda tiene pocos nodos, en la figura aparece solo uno.

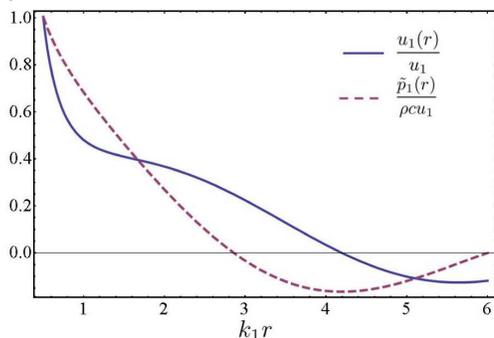


Figura 1. Dependencia radial de la velocidad u_1 y la presión \tilde{p}_1 adimensionales para $k_1 R_1 \sim 1$ y $k_1 R_2 \sim 1$. Se ha tomado $k_1 R_1 = 0,5$ y $k_1 R_2 = 6$.

La situación similar cuando $k_2 R_1 \sim 1$ y $k_2 R_2 \sim 1$ aparece recogida en la Fig. 2, en la cual aparece la dependencia radial de la solución (u_2, p_2) .

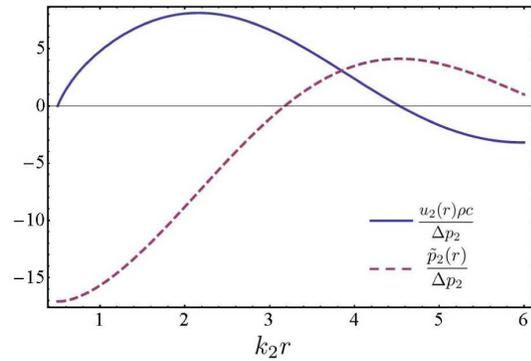


Figura 2. Dependencia radial de la velocidad u_2 y la presión \tilde{p}_2 adimensionales para $k_2 R_1 \sim 1$ y $k_2 R_2 \sim 1$. Se ha tomado $k_2 R_1 = 0,5$ y $k_2 R_2 = 6$.

Para $k_1 (R_2 - R_1) \gg 1$, la dependencia radial típica de la solución (u_1, p_1) se muestra en la Fig. 3. En este caso, la distancia comprendida entre las dos esferas será mucho mayor que la longitud de onda asociada a la oscilación de la esfera interior. El perfil de la onda estacionaria tiene muchos nodos, evidenciando una fuerte dependencia radial.

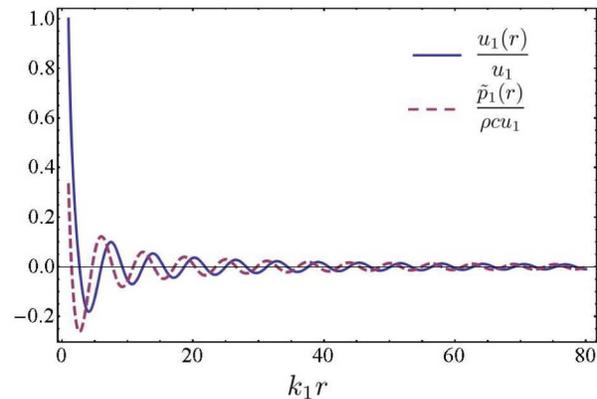


Figura 3. Dependencia radial de la velocidad u_1 y la presión \tilde{p}_1 en el caso $k_1 (R_2 - R_1) \gg 1$. En la figura $k_1 R_1 = 1$ y $k_1 R_2 = 80$.

El caso similar en que $k_2 (R_2 - R_1) \gg 1$ está representado en la Fig. 4. Nótese que al igual que en la Fig. 3 la amplitud disminuye a medida que nos alejamos del radio R_1 .

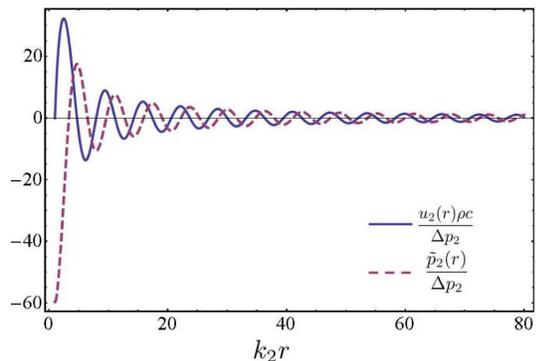


Figura 4. Dependencia radial de la velocidad u_2 y la presión \tilde{p}_2 para los valores $k_2 R_1 = 1$ y $k_2 R_2 = 80$.

CONCLUSIONES

Se ha obtenido una expresión analítica para la dependencia radial de la presión y la velocidad de las ondas estacionarias entre dos esferas bajo condiciones de contorno oscilatorias. La solución es una superposición de dos contribuciones debido a la oscilación de cada frontera. Se obtuvo una ecuación para calcular las frecuencias propias, para las cuales ocurre la resonancia. Se analizaron varias regiones de frecuencias. Para $k_1 R_1 \ll 1$ o $k_2 R_1 \ll 1$ la esfera interior ejerce poca influencia; mientras que si $k_1 R_2 \ll 1$ o $k_2 R_2 \gg 1$ el perfil de la onda tiene una débil dependencia radial. Se analizó además el caso $k_1 R_1 \sim 1$ y $k_1 R_2 \sim 1$ o $k_2 R_1 \sim 1$ y $k_2 R_2 \sim 1$, para el cual existen pocos nodos. Una situación diferente ocurre si $k_1 (R_2 - R_1) \gg 1$ o $k_2 (R_2 - R_1) \gg 1$, donde aparecerán muchos nodos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Dr. César Dopazo por proponer el problema y a la colaboración así iniciada con colegas del Departamento de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza, donde se llevan a cabo investigaciones relacionadas con el tema y que en un futuro próximo nos permitirán comparar estos resultados analíticos con cálculos numéricos y mediciones que llevan a cabo en dicha institución.

[1] K. S. Suslick and D. J. Flannigan, *Annu. Rev. Phys. Chem.* **59**, 659-683 (2008).

[2] M. S. Plesset and A. Prosperetti, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **9**, 145-185 (1977).

[3] Z. C. Feng and L. G. Leal, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **29**, 201-243 (1997).

[4] G. Hauke, D. Fuste and C. Dopazo, *Phys. Rev. E* **75**, 066310 (2007).